



毫赫兹手征引力波背景的类轴子场起源

丁可忆^{1,3}, 付成杰^{2*}, 徐宝屿^{3,1}, 张云龙^{1,4,5*}

- 中国科学院国家天文台, 北京 100101;
- 安徽师范大学物理与电子信息学院, 芜湖 241002;
- 中国科学院大学天文与空间科学学院, 北京 100049;
- 中国科学院大学国际理论物理中心(亚太地区), 北京 100190;
- 中国科学院大学杭州高等研究院基础物理与数学科学学院, 杭州 310024

*联系人, 付成杰, E-mail: fucj@ahnu.edu.cn; 张云龙, E-mail: zhangyunlong@nao.cas.cn

收稿日期: 2024-03-04; 接受日期: 2024-04-07; 网络出版日期: 2024-07-02

国家重点研发计划(编号: 2021YFC2201901, 2020YFC2201502)、国家自然科学基金(编号: 12375059, 12305057)和中央高校基本科研业务费专项资助项目

摘要 引力波探测打开了探索天体物理和宇宙学中基本问题的新窗口. 本文简要介绍了手征引力波背景的早期宇宙起源, 面向空间引力波探测器LISA、太极和天琴等所对应的毫赫兹频段. 本文对比了在宇宙早期辐射主导时期, 类轴子-暗光子耦合和类轴子-引力子耦合两种模型中由类轴子场产生的手征引力波谱, 并讨论了具有引力陈-西蒙斯耦合的轴子单场暴胀机制. 数值计算了在不同模型下产生的引力波频谱形状及红移到今天的峰值频率范围, 并讨论了由陈-西蒙斯拓扑项引起的引力波信号宇称破缺效应.

关键词 手征引力波, 类轴子场, 早期宇宙

PACS: 04.30.Db, 04.50.+h, 98.80.Cq

1 引言

自从2016年LIGO首次探测到引力波^[1], 人类拥有了一个研究天体物理、宇宙学和粒子物理中的基本问题的新窗口, 而借助引力波信号来搜寻轴子型暗物质也成为研究热点. 来自后发星系团成员星系的运动、盘星系的旋转曲线、子弹星系团X射线观测、引力透镜、宇宙微波背景辐射等的多种天文学观测证据表明, 宇宙的主要物质成分是暗物质. 根据普朗克卫星的观测结果, 暗物质构成宇宙丰度的26%, 占据宇宙物质的85%. 理解暗物质的本质是当今物理学与天文学

研究的基本问题之一. 在过去的几十年间天文和物理学家提出了不同的暗物质候选者, 这不仅来自宇宙学观测的驱动, 也有来自于粒子物理中的研究动机, 其中轴子和类轴子型暗物质是强有力的暗物质候选者^[2-8]. 轴子最初是为了解决量子色动力学(Quantum Chromodynamics, QCD)中的强CP问题的Peccei-Quinn机制而引入的^[9,10], 此外轴子和类轴子粒子也出现在弦理论模型中^[11,12].

本文面向空间引力波探测器比较灵敏的毫赫兹频段, 简要介绍手征引力波的早期宇宙起源机制. 对比了辐射为主时期的两种模型(类轴子-暗光子耦合和类

引用格式: 丁可忆, 付成杰, 徐宝屿, 等. 毫赫兹手征引力波背景的类轴子场起源. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2024, 54: 270408
Ding K Y, Fu C, Xu B-Y, et al. Chiral gravitational wave background in millihertz from axion-like fields (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2024, 54: 270408, doi: [10.1360/SSPMA-2024-0088](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2024-0088)

轴子-引力子耦合)中类轴子场振荡产生的引力波效应,并简要介绍了手征引力波的早期单场轴子暴胀场产生机制. 本文计算了早期宇宙中类轴子场机制产生的随机引力波能量谱密度,通过计算峰值的引力波信号的频率和振幅,与未来的空间引力波探测器(如LISA、太极和天琴)的灵敏度范围对比并给出了特征参数. 也讨论了陈-西蒙斯(Chern-Simons)拓扑项带来的类轴子场产生的引力波的宇称破缺效应.

本文第2节介绍了早期宇宙辐射为主时期类轴子场产生引力波的机制,分析不同产生机制对应的参数和引力波频谱特征等. 第3节简要介绍了早期宇宙轴子单场暴胀对原初引力波放大效应和宇称破缺效应等. 第4节进行了总结和讨论.

2 类轴子场产生引力波机制

本节主要讨论辐射为主时期,类轴子场振荡产生的引力波效应. 作为暗物质的一种候选者,轴子及类轴子型粒子出现在许多标准模型的拓展中,例如解决量子色动力学中强CP问题的Peccei-Quinn模型^[9,10]、暴胀模型^[13]和弦唯象模型^[11]等. 尽管轴子理论早在19世纪70年代已经被提出,但是近些年又成为一个被广泛关注的研究问题,在过去十几年的实验中,WIMP粒子的参数空间被压缩,物理学家开始重新审视暗物质粒子模型,探索WIMP之外其他的暗物质候选者. 因为能同时解决强CP问题和暗物质问题,轴子便激发了广泛的研究兴趣.

轴子的概念最初是由解决强CP问题的Peccei-Quinn机制引入的. QCD的拉氏量含有CP破缺项 $\mathcal{L}_{CP} = \theta \frac{\alpha_s}{8\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_a^{\mu\nu}$,但是实验上对 θ 的限制是 $|\theta| < 0.8 \times 10^{-10}$ ^[14]. 如何理解在QCD中的CP宇称守恒,也称为强CP问题. 为了解释这个问题有不同的解决方案,其中最著名的一种机制是Peccei-Quinn机制. 在这一机制下我们引入新的 $U(1)$ 规范对称性,在标度 f_a 下自发破缺. Weinberg和Wilczek指出这一自发破缺的整体对称性会引入一个新的伪Nambu-Goldstone粒子,即轴子. 在低能标下这一项的拉氏量: $L_a \supset \frac{\alpha_s}{8\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_a^{\mu\nu} \frac{a}{f_a}$,引入一个新的自由度,从而将QCD参数 θ 拓展为常数和变化的场的组合: $\theta \rightarrow \theta + a/f_a$,其中 a 是轴子场, θ 场的演化行为由它的势函数来决定,周期性的势函数在极小值处有效的 θ 为0,这揭示了为什么 θ 如此之小,同时提供

了解决强CP问题的一种方案.

在其他的一些模型中,也存在高能标处的自发对称性破缺,导致一个赝Nambu-Goldstone粒子的产生,这些粒子和轴子一样有着低质量和弱耦合的特点,但并不具有和轴子一样的模型限制. 将这些粒子称为类轴子粒子,而来自于Peccei-Quinn机制的轴子则称为QCD轴子. 类轴子型暗物质的参数空间覆盖了许多个数量级,这使得对这种粒子的探测富于挑战性. 在一些模型中,轴子可以与胶子、光子等标准模型粒子产生微弱的相互作用,根据不同的相互作用,不同的探测实验被设计来探测这种粒子. 上述的直接/间接探测的例子都依赖于轴子和电磁场的耦合,在轴子和标准模型中的粒子耦合很弱或不发生相互作用时,即所谓的不可见轴子模型(Invisible Axion). 在这种情况下,可以探测轴子或类轴子粒子在早期宇宙中产生的随机引力波背景.

2.1 类轴子-暗光子耦合

Machado等人^[15]在2018年的工作考虑了类轴子场和暗光子场(一种规范玻色子场)耦合的模型,当宇宙的哈勃膨胀率与轴子质量相当,轴子场开始向势能最低点滚动,这为暗光子的运动方程带来不稳定性,在特定频率范围内的暗光子模开始指数增长,真空波动得以指数增长,这诱导了随时间变化的能量-动量张量中各向异性的应力,最终产生引力波. 在这个过程中,存储在轴子场中的很大一部分能量密度转化为暗光子辐射和引力波辐射. 在轴子衰变常数 $f \geq 10^{17}$ GeV,以及一个比较大的轴子质量范围内,这个信号都可以被脉冲星计时阵列或者地基/空间的引力波探测器探测到. 类轴子-暗光子耦合模型的主要作用量为^[15]

$$S_X = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{M_P^2}{2} R + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_X + \dots \right), \quad (1)$$

其中拉氏量密度

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2)$$

$$\mathcal{L}_X = -\frac{1}{4} X_{\mu\nu} X^{\mu\nu} - \frac{\alpha}{4f} \phi X_{\mu\nu} \tilde{X}^{\mu\nu}, \quad (3)$$

其中, ϕ 为类轴子场, X 为暗光子场,其陈-西蒙斯项 $X\tilde{X}$ 的定义为 $\frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\sigma\mu\nu} X_{\gamma\sigma} X^{\mu\nu}$,其中 $\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} = \epsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} / \sqrt{-g}$, $\epsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}$ 是Levi-Civita全反对称张量. 考虑类轴子场 ϕ 如下

形式的势函数:

$$V(\phi) = m^2 f^2 \left[1 - \cos\left(\frac{\phi}{f}\right) \right], \quad (4)$$

其中, m 和 f 分别是类轴子的质量和衰变常数. 周期势函数(4)可以由场论的低阶近似或瞬子效应给出, 并具有类轴子场周期 $\phi \simeq \phi + 2\pi f$ ^[16]. 采取均匀各向同性的FLRW(Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker)度规 $ds^2 = a(\tau)^2(-d\tau^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j)$, 并且假设 ϕ 场是均匀各向同性的, 可以得到轴子场的运动方程:

$$\phi'' + 2aH\phi' + a^2 \frac{\partial V}{\partial \phi} = -\frac{\alpha}{f} a^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \quad (5)$$

这里对共形时间 τ 求导, \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 是暗电场和磁场, 哈勃参数的定义由 $H = a'/a^2$ 给出. 采取库仑规范, 暗光子场 \mathbf{X} 场的运动方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 - \alpha \frac{\phi'}{f} \nabla \times \right) \mathbf{X} = 0. \quad (6)$$

为了讨论暗光子的产生, 将暗规范场量子化:

$$\hat{X}^i(\mathbf{x}, \tau) = \sum_{\lambda=\pm} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} v_{\lambda}(k, \tau) \varepsilon_{\lambda}^i(\mathbf{k}) \hat{a}_{\lambda}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \text{h.c.} \quad (7)$$

此处产生和湮灭算符满足的对易关系为 $[\hat{a}_{\lambda}(\mathbf{k}), \hat{a}_{\lambda'}^{\dagger}(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, 极化矢量满足 $\mathbf{k} \cdot \varepsilon^{\pm} = 0$, $\mathbf{k} \times \varepsilon^{\pm} = \mp i k \varepsilon^{\pm}$, $\varepsilon^{\pm} \cdot \varepsilon^{\pm} = 0$ 和 $\varepsilon^{\pm} \cdot \varepsilon^{\mp} = 1$.

暗光子的模函数满足的方程由下式给出:

$$v_{\pm}''(k, \tau) + \omega_{\pm}^2(k, \tau) v_{\pm}(k, \tau) = 0, \quad (8)$$

其中, $\omega_{\pm}^2(k, \tau) = k^2 \mp k \frac{\alpha}{f} \phi'$ 是时间依赖的频率. 当 ϕ 场开始振荡, 其中一个螺旋度的暗光子模在 $0 < k < \alpha|\phi'|/f$ 范围内所对应的 $\omega_{\pm}^2(k, \tau)$ 是负值, 引起快子不稳定性, 将会导致对应螺旋度的暗光子模有指数增长的行为, $v_{\pm} \sim e^{|\omega_{\pm}\tau|}$. 图1展示了一组参数下暗光子的谱能量密度谱. 图2展示了暗光子的其中一个模式的增长曲线, 随着宇宙的膨胀. 红色曲线对应暗光子的“+”螺旋度, 蓝色曲线对应“-”螺旋度, 从这里的两幅图片中都可以看出两个螺旋度的增长存在指数的量级差. 暗光子的模函数在经历指数增长之后退出了振荡区间, 振幅趋于稳定.

下面介绍暗光子诱导产生引力波的过程, 傅里叶空间的线性化引力波方程由下式给出:

$$\bar{h}_{ij}''(\mathbf{k}, \tau) + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) \bar{h}_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = \frac{2a}{M_p^2} \Pi_{ij}(\mathbf{k}, \tau), \quad (9)$$

其中, $\bar{h}_{ij} \equiv ah_{ij}$, $\Pi_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = \Lambda_{ij}^{kl} T_{kl}(\mathbf{k}, \tau)$ 是暗光子能量-动量张量的各向异性的部分. 算符 $\Lambda_{ij}^{kl} = \Lambda_i^k \Lambda_j^l - \frac{1}{2} \Lambda_{ij} \Lambda^{kl}$ 是横向无迹的投影算符, 其中 $\Lambda_{ij} = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$.

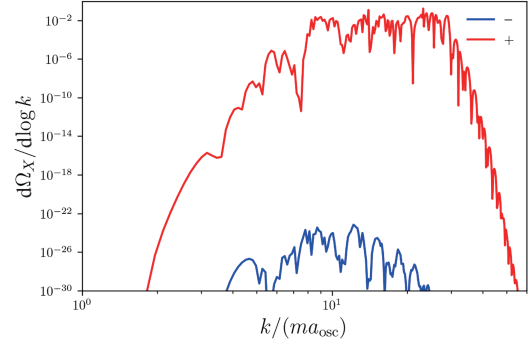


图1 (网络版彩图)不同模式下暗光子的能量密度谱. 模型参数 $m = 0.5$ eV, $f = 2 \times 10^{17}$ GeV, $\alpha = 75$, 红色曲线对应暗光子的“+”螺旋度, 蓝色曲线对应“-”螺旋度. a_{osc} 是轴子场开始振荡时刻宇宙的尺度因子

Figure 1 (Color online) Dark photon spectral energy density of different modes. The model parameters for dark photon is $m = 0.5$ eV, $f = 2 \times 10^{17}$ GeV, $\alpha = 75$. The red line corresponds to the spectrum for “+” helicity of dark photons while the blue line corresponds to the “-” helicity spectrum. a_{osc} is the scale factor of the universe at the moment the axion field starts to oscillate.

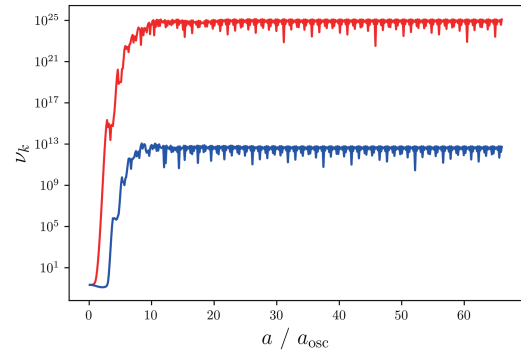


图2 (网络版彩图)暗光子的其中一个模式 v_k 在经历快子不稳定性时的增长曲线. 红色曲线对应暗光子的“+”螺旋度, 蓝色曲线对应“-”螺旋度. 在这个例子中 $k \sim 12ma_{\text{osc}}$, a_{osc} 是轴子场开始振荡的时刻宇宙的尺度因子. 在经历了指数增长之后, 随着宇宙的膨胀, 振荡的窗口关闭, 暗光子的模函数趋于恒定

Figure 2 (Color online) Growth of the dark photon mode v_k experiencing tachyonic instability. The red line corresponds to the spectrum for “+” helicity of dark photons while the blue line gives the “-” helicity spectrum. In this case $k \sim 12ma_{\text{osc}}$, where a_{osc} is the scale factor of the universe at the moment the axion field starts to oscillate. After exponential growth the dark photon mode function becomes constant as the tachyonic instability band ceases to exit with the expanding of the universe.

考虑辐射为主时期的宇宙, 因此可以忽略 h_{ij} 的运动方程中的 a'' 项, h_{ij} 的解由下式给出:

$$\hat{h}_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = \frac{2}{aM_p^2} \int_{\tau_{\text{osc}}}^{\tau} d\tau' a(\tau') \mathcal{G}(k, \tau, \tau') \hat{\Pi}_{ij}(\mathbf{k}, \tau'). \quad (10)$$

此处格林函数 $\mathcal{G} = \sin[k(\tau - \tau')]/k$. 算符 $\hat{\Pi}_{ij}$ 的具体表达式是

$$\hat{\Pi}_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = -\frac{\Lambda_{ij}^{kl}}{a^2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [\hat{E}_k(\mathbf{q}, \tau) \hat{E}_l(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \tau) + \hat{B}_k(\mathbf{q}, \tau) \hat{B}_l(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \tau)], \quad (11)$$

其中,

$$\begin{aligned} \hat{E}_i(\mathbf{q}, \tau) &= \hat{X}'_i(\mathbf{q}, \tau) = v'_\lambda(q, \tau) \varepsilon_i^\lambda(\mathbf{q}) \hat{a}_\lambda(\mathbf{q}), \\ \hat{B}_i(\mathbf{q}, \tau) &= -i\varepsilon_{ijk} q_j \hat{X}_k(\mathbf{q}, \tau) = \lambda q v_\lambda(q, \tau) \varepsilon_i^\lambda(\mathbf{q}) \hat{a}_\lambda(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

引力波的谱能量密度为

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{\text{GW}}}{d \log k} &= \frac{k^3}{4\pi^2 a^4 M_p^2} \int_{\tau_{\text{osc}}}^{\tau} d\tau' d\tau'' a(\tau') a(\tau'') \\ &\times \cos[k(\tau' - \tau'')] \Pi^2(\mathbf{k}, \tau', \tau''), \end{aligned} \quad (12)$$

其中非等时关联函数 $\Pi^2(\mathbf{k}, \tau', \tau'')$ 的定义为

$$\langle 0 | \hat{\Pi}_{ij}(\mathbf{k}, \tau) \hat{\Pi}_{ij}^*(\mathbf{k}', \tau') | 0 \rangle = (2\pi)^3 \Pi^2(\mathbf{k}, \tau, \tau') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

暗光子的分布由其中一个极化度主导, 而引力波的指数增长是由于暗光子的能量密度波动诱导, 因此引力波能谱也具有手征性.

2.2 类轴子-引力子耦合

陈-西蒙斯修改引力的作用量由下式给出^[17]:

$$S_R = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{M_P^2}{2} R + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{\phi R \tilde{R}} + \dots \right), \quad (13)$$

其中拉格朗日密度 \mathcal{L}_ϕ 为式(2), 轴子场 ϕ 耦合于引力陈-西蒙斯项:

$$\mathcal{L}_{\phi R \tilde{R}} = \frac{\alpha_g}{4} \phi R \tilde{R}, \quad (14)$$

其中, α_g 是有量纲的耦合参数, Pontryagin密度 $R\tilde{R}$ 的定义为 $\frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\sigma\mu\nu} R^\beta_{\alpha\gamma\delta} R^\alpha_{\beta\mu\nu}$. 在FLRW宇宙学背景度规下, 轴子场的运动方程为

$$\phi'' + 2aH\phi' + a^2 \frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\alpha_g}{4} a^2 R \tilde{R}. \quad (15)$$

对张量扰动 h_{ij} 在傅里叶空间的圆极化基上做展开:

$$h_{ij}(\tau, \mathbf{x}) = \sum_{A=R,L} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e_{ij}^A(\mathbf{k}) h_{\mathbf{k}}^A(\tau) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (16)$$

其中, e_{ij}^A 是圆极化张量, $A=L, R$ 相应标志着左手和右手的极化, 相应的极化张量分别为

$$e_{ij}^R := \frac{1}{\sqrt{2}} (e_{ij}^+ + i e_{ij}^\times), \quad (17)$$

$$e_{ij}^L := \frac{1}{\sqrt{2}} (e_{ij}^+ - i e_{ij}^\times). \quad (18)$$

这些极化张量满足条件:

$$\begin{aligned} e_{ij}^R(\mathbf{k}) e^{ijR}(\mathbf{k}) &= e_{ij}^L(\mathbf{k}) e^{ijL}(\mathbf{k}) = 0, \\ e_{ij}^R(\mathbf{k}) e^{ijL}(\mathbf{k}) &= 2, \end{aligned} \quad (19)$$

$$i k_p \varepsilon^{mpj} e_{ij}^A(\mathbf{k}) = \lambda_A k e^m_i{}^A(\mathbf{k}) \quad (A = L, R).$$

定义

$$z_A^2(\tau, \mathbf{k}) = \frac{a^2 M_P^2}{2} \left(1 - \lambda_A k \frac{\alpha_g \phi'}{M_{\text{Pl}}^2 a^2(\tau)} \right), \quad (20)$$

其中, $\lambda_R = +1, \lambda_L = -1$, 并做变换 $\mu_{\mathbf{k}}^A \equiv z_A(\mathbf{k}) h_{\mathbf{k}}^A$, 可以给出引力子的模函数满足的方程^[18]:

$$(\mu_{\mathbf{k}}^A)'' + \left(k^2 - \frac{z_A''(\mathbf{k})}{z_A(\mathbf{k})} \right) \mu_{\mathbf{k}}^A = 0. \quad (21)$$

接下来数值求解轴子场和引力子耦合的运动方程, 并考虑了粒子产生对轴子场产生的反作用. 可以通过计算Pontryagin密度 $R\tilde{R}$ 的真空期望值来估计这一效应的大小:

$$\langle R\tilde{R} \rangle \simeq \frac{1}{a^4} \partial_\tau \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{A=R,L} \frac{k \lambda_{\mathbf{k}}^A}{z_A^2(\mathbf{k})} (|u_{\mathbf{k}}^A|^2 - k^2 |u_{\mathbf{k}}^A|^2) \right]. \quad (22)$$

文献^[19]同样考虑了轴子场耦合于引力陈-西蒙斯项产生的引力波信号. 为了规避不稳定的增长模式, 波数被引入了一个截断 Λ , 当物理波数 $k/a > \Lambda$ 时, 引力陈-西蒙斯项的效应被关掉了. 在计算中并没有引入截断, 而是考虑了经历快子不稳定性的过程中产生引力子的反作用项对轴子场运动方程的影响.

引力波的谱能量密度的定义由下式给出:

$$\frac{d\rho_{\text{GW}}}{d \log k} = \frac{M_P^2 k^3}{8\pi^2 a^2} \mathcal{P}_{h'}(\mathbf{k}, \tau) = \frac{M_P^2 k^3}{4\pi^2 a^2} \sum_{A=R,L} |h_{\mathbf{k}}^A|^2. \quad (23)$$

考虑辐射为主时期的图景, 当哈勃参数 $H \gg m$ 时, 轴子场 ϕ 因为哈勃摩擦保持不变, 并不会产生引力子. 当宇宙逐渐冷却, 随着宇宙的膨胀哈勃参数减小至 $H \simeq m$, 轴子场开始滚动, 并在有效势的最低点振荡, 轴子场的振荡使得引力子的一个螺旋度在一定的频率范围内会有 $\omega_{\lambda_A}^2 = k^2 - \frac{z_A'}{z_A} < 0$, 这会使得相应的螺旋度对应的引力子模式产生不稳定性, 经历指数增长.

图3展示了不同模式下产生的引力波能量密度谱. 图4展示了引力子的其中一个模式的增长曲线. 从图中可以看出, 同轴子场-暗光子耦合的情形类似, 两个螺旋度对应的引力波能量密度谱和增长曲线都存在指数量级差.

2.3 结果和参数对比

为了计算目前观测到的引力波能谱的峰值和频率, 需要考虑宇宙学红移的影响, 引力波产生时宇宙处于辐射为主时期. 今天的引力波信号需要考虑红移因子:

$$\Omega_{\text{GW}}^0 \approx 1.67 \times 10^{-4} g_{\rho,*}^{-1/3} \Omega_{\text{GW}}^* \quad (24)$$

其中, $g_{\rho,*}$ 是引力波产生时刻的有效自由度, Ω_{GW}^* 是信号产生时刻的引力波能量密度. 而红移后引力波信号的频率由下式给出:

$$f_0 \approx 1.595 \times 10^{-3} \left(\frac{100}{g_{\rho,*}} \right)^{1/12} \left(\frac{k}{ma_{\text{osc}}} \right) \left(\frac{m}{\text{eV}} \right)^{1/2} \text{ Hz}. \quad (25)$$

其中, m 是轴子场的质量, a_{osc} 是轴子场开始振荡时刻宇宙的尺度因子. 下面分别选取表1和2中的两组参数, 分析对比在类轴子-暗光子耦合和类轴子-引力子耦合两种模型中产生的引力波能谱.

图5展示了相应引力波能谱的结果 $\Omega_{\text{GW}}^0 h^2$, 峰值落在空间引力波探测计划LISA、太极和天琴的灵敏度曲线的范围内. 类轴子-暗光子耦合和类轴子-引力子耦合两种模型分别选取了两组对应的参数进行比较, 相应参数记录在表1和2中.

从图5可以看出, 类轴子-暗光子耦合机制给出比较宽的引力波频谱信号, 类轴子-引力子耦合则给出比较窄的引力波频谱信号. 而引力波频谱峰值的位置主要跟类轴子的质量比较相关, 峰值的高度则取决于相应的耦合系数.

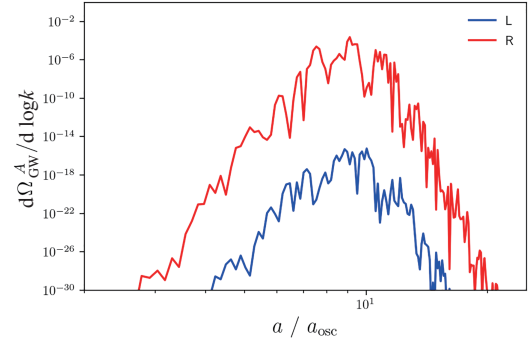


图3 (网络版彩图) 不同模式下引力波的谱能量密度. 参数 $m = 0.5 \text{ eV}$, $f = 2 \times 10^{17} \text{ GeV}$, $\alpha = 6.3 \times 10^{39} \text{ GeV}^{-1}$, 红色曲线对应于右手态, 蓝色曲线对应于左手态

Figure 3 (Color online) Gravitational wave spectral energy density. The model parameters for gravitational wave is $m = 0.5 \text{ eV}$, $f = 2 \times 10^{17} \text{ GeV}$, and $\alpha = 6.3 \times 10^{39} \text{ GeV}^{-1}$. The red line and the blue line correspond to the spectrum for right-handed and left-handed graviton.

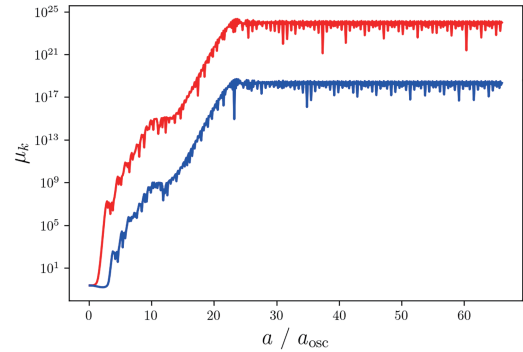


图4 (网络版彩图) 引力子的其中一个模式 μ_k 在经历快子不稳定性时的增长曲线. 在这个例子中 $k \sim 12ma_{\text{osc}}$, 在经历了指数增长之后, 随着宇宙的膨胀振荡的窗口关闭, 引力子的模函数趋于恒定. 红色曲线对应于右手态, 蓝色曲线对应于左手态

Figure 4 (Color online) Growth of the graviton mode μ_k experiencing tachyonic instability. In this case $k \sim 12ma_{\text{osc}}$. After exponential growth the graviton mode function becomes constant as the tachyonic instability band ceases to exit with the expanding of the universe. The red line and the blue line correspond to the spectrum for right-handed and left-handed graviton.

表1 类轴子-暗光子耦合模型的参数选取

Table 1 Parameter values for axion-dark photon couplings

参数	m (eV)	f (GeV)	α
ALP1($\phi \rightarrow XX$)	0.5	2×10^{17}	75
ALP2($\phi \rightarrow XX$)	0.01	10^{17}	55

表 2 类轴子-引力子耦合模型的参数选取

Table 2 Parameter values for axion-gravitons couplings

参数	m (eV)	f (GeV)	α_g (GeV $^{-1}$)
ALP1($\phi \rightarrow hh$)	0.5	$2. \times 10^{17}$	6.3×10^{39}
ALP2($\phi \rightarrow hh$)	0.01	10^{17}	3.3×10^{43}

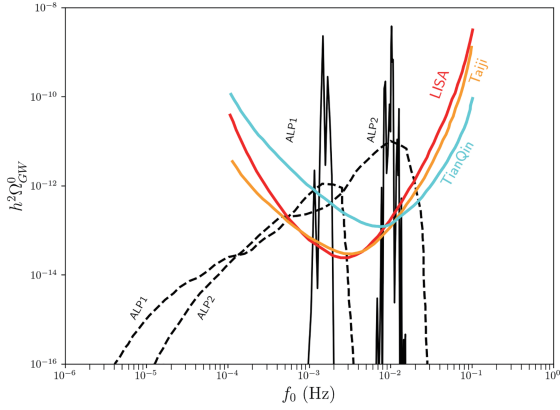


图 5 (网络版彩图)两种模型产生的引力波能量谱: 类轴子-暗光子耦合(虚线所示^[15], 参数在表1)和类轴子-引力子耦合(实线所示, 参数在表2), 以及毫赫兹频段空间引力波探测器LISA^[20]、太极^[21]和天琴^[22]关于随机引力波背景的灵敏度曲线, 并参考了文献^[23]

Figure 5 (Color online) Benchmark gravitational wave spectra at the present time for various values of the model parameters, the axion-dark photon coupling mechanism was shown in the dashed line^[15], with parameters in Table 1 and the axion-graviton coupling mechanism was shown in the solid line with parameters in Table 2. Here we focus on the millihertz frequency range, and based on the gravitational wave background sensitivity curves of LISA^[20], Taiji^[21], and Tianqi^[22] gravitational wave detector. The sensitivity curves also refer to ref. ^[23].

由于暗光子的拓扑项 $X\tilde{X}$ 和引力陈-西蒙斯项 $R\tilde{R}$ 都是宇称破缺的, 类轴子-暗光子耦合和类轴子-引力子耦合两种机制都会产生手征的引力波背景信号. 可以用圆极化度来刻画这一手征的效应:

$$\Pi = \frac{\Omega_{\text{GW}}^{\text{R}} - \Omega_{\text{GW}}^{\text{L}}}{\Omega_{\text{GW}}^{\text{R}} + \Omega_{\text{GW}}^{\text{L}}}. \quad (26)$$

图6展示了类轴子-引力子耦合的模型在表2中两组参数选取下分别对应的极化度. $\Pi = 1, -1$ 分别对应完全右手和左手的引力波信号. 可以看到在可探测的低频部分引力波信号由其中一个螺旋度主导. 这与前面的论述一致, 通过快子不稳定性其中一个螺旋度对应的引力子模函数获得了指数增长, 因此另一个螺旋度相比有指数的压低. 在高频部分由于相位不同引力波手征度在频率空间产生振荡现象, 两个模式的螺旋度更加接近.

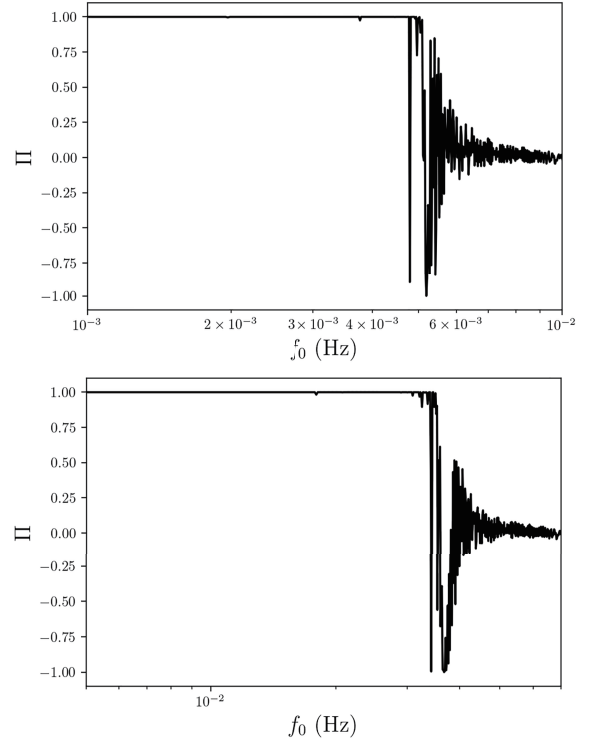


图 6 类轴子-引力子耦合模型中产生引力波信号的手征度, 两组参数来自于表格2

Figure 6 Polarization degree of GWs from axion-graviton coupling for different parameters in Table 2.

3 早期暴胀对原初引力波放大机制

宇宙学暴胀模型成功解决了极早期宇宙中例如视界疑难、平坦性以及原初扰动等一系列基本问题^[24]. 而引力波作为一种全新的信使能使我们更加清晰了解这一阶段的演化历史. 本节将讨论早期暴胀时期, 原初引力波通过类轴子的暴胀场产生的手征放大效应. 在单场轴子暴胀模型中, 具有周期性函数的暴胀子与引力陈-西蒙斯项耦合^[25], 会使得张量扰动被共振放大, 最终导致原初引力波的放大. 而陈-西蒙斯引力作为一种经典的具有宇称破缺性质的引力理论^[17], 其耦合项的存在会使原初引力波产生宇称破缺的解, 从而产生手征的引力波信号.

引入了陈-西蒙斯耦合项的轴子单场暴胀模型的作用量为^[17]

$$S_\theta = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{M_P^2}{2} R + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{\text{CS}} + \dots \right), \quad (27)$$

其中的拉格朗日密度 \mathcal{L}_ϕ 由式(2)给出, 引力陈-西蒙斯耦合项为

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{8} \vartheta(\phi) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\rho\sigma\alpha\beta} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu}, \quad (28)$$

其中, ϕ 代表类轴子型标量场, $\vartheta(\phi)$ 代表和标量场相关的函数模型. 在本节中, 由于考察的是周期性的暴胀子与陈-西蒙斯项的耦合, 所以暴胀子函数 $\vartheta(\phi)$ 选取的是具有参数窗口的周期性函数,

$$\vartheta(\phi) = \frac{M_P^2}{M^2} \sin\left(\frac{\phi}{\Lambda}\right) \Theta(\phi_s - \phi) \Theta(\phi - \phi_e). \quad (29)$$

其中, M 和 Λ 分别表征了暴胀场 $\vartheta(\phi)$ 的振幅和振荡周期, Θ 表示的是阶跃函数, Θ 函数中的 ϕ_s 和 ϕ_e 是和观测相关的限制条件, 用以表示陈-西蒙斯项起作用的起点和终点的场值.

此外, 轴子暴胀场的势函数被选取为

$$V(\phi) = \lambda M_P^{10/3} \phi^{2/3}. \quad (30)$$

分数幂的选取能保证暴胀的稳定性和动力学约束, 还能避免一般单场暴胀模型中由于单次幂导致的场的超普朗克尺度[26]. 随后通过总作用量, 选取FLRW度规, 对张量扰动 h_{ij} 做变分并保留到二阶, 可以得到关于张量扰动的运动方程:

$$M_P^2 \left(\ddot{h}_{ij} + 3H\dot{h}_{ij} - \frac{1}{a^2} \partial^2 h_{ij} \right) + \frac{\epsilon^{ilk}}{a} \partial_l \left[\dot{\vartheta} \dot{h}_{jk} + (2H\dot{\vartheta} + \ddot{\vartheta}) h_{jk} - \frac{\dot{\vartheta}}{a^2} \partial^2 h_{jk} \right] = 0. \quad (31)$$

将张量扰动展开成圆极化的动量形式(式(16)), 考虑 $\epsilon_{ilm} k^l e_{ij}^A = ik\lambda_A e_{mj}^A$ 并代入运动方程中, 可以得到张量扰动的模式函数为

$$\ddot{h}_A + (3 + \nu_A) H \dot{h}_A + \frac{k^2}{a^2} h_A = 0, \quad (32)$$

其中,

$$\nu_A = \frac{d \ln[1 - \lambda_A(k/a)\dot{\vartheta}/M_P^2]}{H dt}. \quad (33)$$

模式函数的形式最终可以通过参数化简成马修方程

$$\ddot{H}_A + \left(\frac{k^2}{a^2} - \frac{\ddot{F}_A}{F_A} \right) H_A = 0, \quad (34)$$

其中参数分别为

$$H_A = a^{3/2} h_A \sqrt{1 - \lambda_A(k/a)\dot{\vartheta}/M_P^2}, \quad (35)$$

$$F_A = a^{3/2} \sqrt{1 - \lambda_A(k/a)\dot{\vartheta}/M_P^2}. \quad (36)$$

这表明暴胀场将产生参数共振, 从而诱发张量扰动的双折射现象, 这会产生不稳定的快子. 而快子不稳定性会导致其中一种偏振态的张量扰动指数增长, 最终产生手征引力波[25]. 考虑信号产生于暴胀时期, 今天观测到的引力波信号还需要考虑红移因子 $\Omega_{GW}^0(k) \simeq 1.08 \times 10^{-6} \mathcal{P}_h(k)$.

通过数值计算得到单场轴子暴胀模型中不同参数下引力陈-西蒙斯项耦合产生的引力波信号的能谱. 如图7所示, 能明显地看出, 共振带模式的张量扰动在被指数放大后其能谱呈现出窄峰或宽峰平台, 峰值也落在空寂引力波探测器LISA、太极和天琴的灵敏度曲线范围内. 相应的参数选取记录在表3中.

图8展示了轴子单场暴胀模型中, 引力陈-西蒙斯项耦合产生的引力波信号的手征度, 手征度的定义由 $\Pi = (\Omega_{GW}^R - \Omega_{GW}^L)/(\Omega_{GW}^R + \Omega_{GW}^L)$ 给出. 从图8可以看出, 右旋和左旋引力波功率谱在不同频率明显不同, 其比值快速振荡. 这种现象主要是是由于考虑引力波陈-西蒙斯耦合后, 不同极化模式引力波扰动运动方程的差异造成的. 两个偏振的振幅差别主要来源于穿越

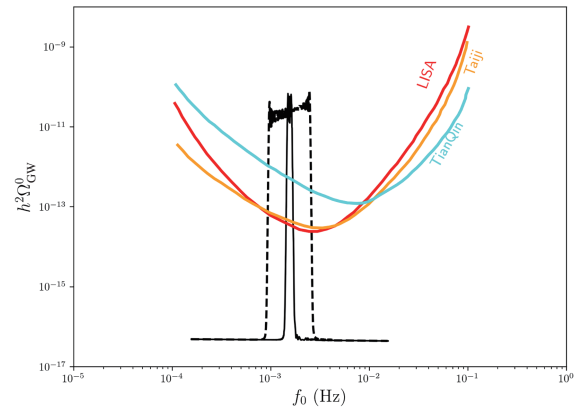


图7 (网络版彩图)轴子单场暴胀模型中, 引力陈-西蒙斯项耦合产生的原初引力波信号放大的能谱. 展示了来自LISA、太极和天琴关于引力波背景的灵敏度曲线, 并参考文献[23]

Figure 7 (Color online) The predicted current energy spectrum of gravitational waves for axion monodromy inflation model with the gravitational Chern-Simons term. The gravitational wave background sensitivity curves of LISA, Taiji, and Tianqi gravitational wave detector are also plotted. The sensitivity curves also refer to ref. [23].

表 3 具有引力陈-西蒙斯项的单场轴子暴胀模型的参数选取, 分别对应图7的窄谱和宽谱两种情况

Table 3 Parameter values for monodromy inflation model with the gravitational Chern-Simons term, which correspond to the two cases of the narrow spectrum and wide spectrum of Figure 7, respectively

参数	窄谱	宽谱
$\lambda M^2/M_P^2$	4×10^{-9}	4×10^{-9}
Λ/M_P	2×10^{-5}	2×10^{-5}
ϕ_s/M_P	5.66	5.61
ϕ_e/M_P	5.54	5.59

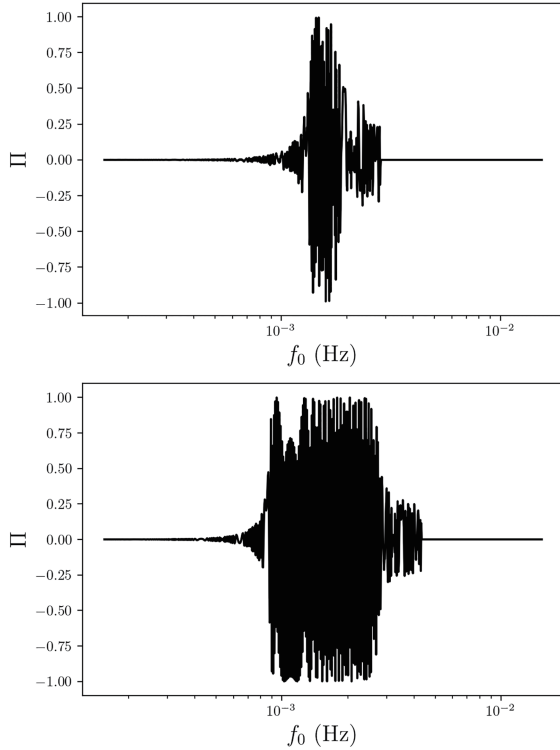


图 8 轴子单场暴胀模型中, 引力陈-西蒙斯项耦合产生引力波信号的手征度. 相应参数由表3给出

Figure 8 Polarization degree of GWs from the axion monodromy inflation model with the gravitational Chern-Simons term in different parameters in Table 3.

视界前相位差, 在视界内部两种偏振模式的放大倍数几乎相同.

暴胀时期产生手征引力波的机制, 除了上文讨论的单场轴子暴胀模型外, 在双场暴胀模型中, 引力陈-西蒙斯项耦合也会导致宇称破坏, 从而导致引力波的双折射效应, 进而产生手征引力波. 在文献[27]中, 使用双场暴胀模型, 并引入动力学项和相互作用项后得

到总的作用量为

$$S[\phi, \vartheta] = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{M_P^2}{2} R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{e^{2b(\phi)}}{2} (\partial\vartheta)^2 - V(\phi, \vartheta) + \frac{\alpha_g}{8} \vartheta R \tilde{R} + \dots \right), \quad (37)$$

其中, ϕ 表示暴胀场, ϑ 表示次一阶的非正则类轴子场, $b(\phi)$ 和 $V(\phi, \vartheta)$ 则可以调节两个场之间的相互作用, $R\tilde{R}$ 为引力陈-西蒙斯项中Pontryagin密度. 选取FLRW度规, 通过总作用量对 h_{ij} 做变分就能得到关于张量扰动的运动方程:

$$M_P^2 \left[\dot{h}_{ij}^2 - \frac{1}{a^2} (\partial_k h_{ij})^2 \right] + \frac{\alpha\dot{\vartheta}}{a} \epsilon^{ijk} \dot{h}_{il} \partial_j \dot{h}_{kl} + \frac{\alpha\dot{\vartheta}}{a^3} \epsilon^{ijk} \partial^2 h_{il} \partial_j h_{kl} = 0. \quad (38)$$

将张量扰动展开成左右极化的动量形式, 并代入运动方程中, 同样可以得到类似式(34)张量扰动模式函数的马修方程. 这代表了相关的类轴子场将产生参数共振, 从而导致张量扰动的双折射现象. 通过调节相互作用场的耦合形式, 可以实现对原初引力波的放大, 最终产生手征引力波信号.

4 总结和讨论

本文主要介绍了手征引力波背景的早期宇宙起源. 分别研究和对比了辐射为主时期的类轴子场产生机制和早期暴胀的产生机制. 在这些模型中, 由于陈-西蒙斯项的存在, 类轴子场或暴胀子场的振荡会导致快子不稳定性产生, 导致其中不同偏振态的引力波信号产生指数增长, 最终导致手征的引力波信号的产生. 本文分析对比了早期宇宙中不同机制中产生的随机引力波背景信号, 通过计算峰值的引力波信号的频率和振幅, 得到了不同机制下引力波的能谱并展示了空间引力波探测器LISA、太极和天琴探测到这些信号的可能性.

在类轴子-暗光子耦合的模型中, 类轴子场在辐射为主时期开始向势能最低点滚动, 这为暗光子的运动方程带来不稳定性. 在特定频率范围内的暗光子的数量开始指数增长, 这诱导了随时间变化的能量-动量张量的各向异性四极矩, 最终产生比较强的手征引力波背景信号. 在类轴子-引力子耦合的模型中, 类轴子场

可以通过快子机制直接产生手征引力波背景信号. 与类轴子-暗光子耦合相比, 轴子-引力子耦合受到的限制较少, 可以为探测轴子暗物质提供更直接、更有效的引力波窗口^[28]. 在考虑引力陈-西蒙斯项的轴子单场或双场暴胀模型中, 原初引力波的张量扰动在模式函数的窗口期共振带被指数放大, 根据不同的参数可以产生窄峰或宽峰的手征引力波信号.

最后, 还给出了在不同机制下引力波信号的手征度, 以展现手征引力波左右手极化模式间的不对称性. 在辐射为主时期产生引力波的两机制中, 引力波表现出了高度极化. 而在暴胀时期对原初引力波的放大机制中, 则表现出了左右手两种极化模式之间的振荡.

与引力波相关的手征度则直接反映了引力波信号的极化特征. 在空间引力波探测实验中, 我们希望能从探测到的信号中分离出这种手征度, 从而确定与之相关的机制并验证机制背后的物理理论. 事实上, 单一的空间干涉仪由于其平面结构导致的镜像对称性, 会使得均匀各向同性的随机手征引力波信号相互抵消, 最终导致其对于引力波手征度并不敏感. 幸运的是, 随着LISA、太极和天琴这些空间引力波探测项目的推进, 使得利用联合网络来探测其手征度成为可能, 这种联合探测不会受到各种信号抵消的影响^[29], 从而使我们能够有希望完整地探测到手征引力波背景的信号.

参考文献

- 1 Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys Rev Lett*, 2016, 116: 061102
- 2 Ferreira E G M. Ultra-light dark matter. *Astron Astrophys Rev*, 2021, 29: 7
- 3 Hui L. Wave dark matter. *Annu Rev Astron Astrophys*, 2021, 59: 247–289
- 4 Antypas D, Banerjee A, Bartram C, et al. New horizons: Scalar and vector ultralight dark matter. arXiv: 2203.14915
- 5 Moroi T, Yin W. Light dark matter from inflaton decay. *J High Energy Phys*, 2021, 2021: 301
- 6 Sun S, Yang X Y, Zhang Y L. Pulsar timing residual induced by wideband ultralight dark matter with spin 0,1,2. *Phys Rev D*, 2022, 106: 066006
- 7 Brito R, Ghosh S, Barausse E, et al. Stochastic and resolvable gravitational waves from ultralight bosons. *Phys Rev Lett*, 2017, 119: 131101
- 8 An H, Huang F P, Liu J, et al. Radio-frequency dark photon dark matter across the Sun. *Phys Rev Lett*, 2021, 126: 181102
- 9 Peccei R D, Quinn H R. CP conservation in the presence of pseudoparticles. *Phys Rev Lett*, 1977, 38: 1440–1443
- 10 Peccei R D, Quinn H R. Constraints imposed by CP conservation in the presence of pseudoparticles. *Phys Rev D*, 1977, 16: 1791–1797
- 11 Svrcek P, Witten E. Axions in string theory. *J High Energy Phys*, 2006, 2006: 051
- 12 Arvanitaki A, Dimopoulos S, Dubovsky S, et al. String axiverse. *Phys Rev D*, 2010, 81: 123530
- 13 Freese K, Frieman J A, Olinto A V. Natural inflation with pseudo Nambu-Goldstone bosons. *Phys Rev Lett*, 1990, 65: 3233–3236
- 14 Lamoreaux S K, Golub R. Comment on “Improved experimental limit on the electric dipole moment of the neutron”. *Phys Rev Lett*, 2007, 98: 149101
- 15 Machado C S, Ratzinger W, Schwaller P, et al. Gravitational wave probes of axionlike particles. *Phys Rev D*, 2020, 102: 075033
- 16 di Cortona G G, Hardy E, Vega J P, et al. The QCD axion, precisely. *J High Energy Phys*, 2016, 2016: 034
- 17 Alexander S, Yunes N. Chern-Simons modified general relativity. *Phys Rep*, 2009, 480: 1–55
- 18 Kamada K, Kume J, Yamada Y. Renormalization in gravitational leptogenesis with pseudo-scalar-tensor coupling. *J Cosmol Astropart Phys*, 2020, 2020: 030
- 19 Li M, Sun S, Yan Q S, et al. Gravitational waves from axion wave production. arXiv: 2309.08407
- 20 Amaro-Seoane P, et al. (LISA). Laser interferometer space antenna. arXiv: 1702.00786
- 21 Ruan W H, Guo Z K, Cai R G, et al. Taiji program: Gravitational-wave sources. *Int J Mod Phys A*, 2020, 35: 2050075
- 22 Luo J, Chen L S, Duan H Z, et al. TianQin: A space-borne gravitational wave detector. *Class Quantum Grav*, 2016, 33: 035010
- 23 Bian L, Cai R G, Cao S, et al. The gravitational-wave physics II: Progress. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2021, 64: 120401
- 24 Mukhanov V. *Physical Foundations of Cosmology*. Oxford: Cambridge University Press, 2005
- 25 Fu C, Liu J, Zhu T, et al. Resonance instability of primordial gravitational waves during inflation in Chern-Simons gravity. *Eur Phys J C*, 2021, 81: 204
- 26 Silverstein E, Westphal A. Monodromy in the CMB: Gravity waves and string inflation. *Phys Rev D*, 2008, 78: 106003
- 27 Peng Z Z, Zeng Z M, Fu C, et al. Generation of gravitational waves in dynamical Chern-Simons gravity. *Phys Rev D*, 2022, 106: 124044
- 28 Sun S, Zhang Y L. Fast gravitational wave bursts from axion clumps. *Phys Rev D*, 2021, 104: 103009

29 Seto N. Measuring parity asymmetry of gravitational wave backgrounds with a heliocentric detector network in the mHz band. [Phys Rev Lett](#), 2020, 125: 251101

Chiral gravitational wave background in millihertz from axion-like fields

DING KeYi^{1,3}, FU ChengJie^{2*}, XU Bao-Yu^{3,1} & ZHANG Yun-Long^{1,4,5*}

¹National Astronomy Observatories, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101, China;

²School of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu 241002, China;

³School of Astronomy and Space Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

⁴International Center for Theoretical Physics Asia-Pacific, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

⁵School of Fundamental Physics and Mathematical Sciences, Hangzhou Institute for Advanced Study, University of Chinese Academy of Sciences (UCAS), Hangzhou 310024, China

*Corresponding authors (FU ChengJie, email: fucj@ahnu.edu.cn; ZHANG Yun-Long, email: zhangyunlong@nao.cas.cn)

The first detection of gravitational waves has opened a new window to probe fundamental problems in astrophysics and cosmology. In this paper, we briefly introduce the chiral gravitational waves originating from the early universe, focusing on those within the millihertz-frequency range. Millihertz frequencies are within the detection capabilities of space-based gravitational wave detectors, including LISA, Taiji, and Tianqin. We mainly compare the gravitational wave spectra generated by a rolling axion field during the radiation-dominated era, examining two similar models: axion-dark-photon coupling and axion-graviton coupling. Furthermore, we introduce a mechanism of axion inflation with gravitational Chern-Simons coupling. We numerically calculate the shape of the stochastic gravitational wave spectrum generated in this scenario, paying special attention to its peak frequency range as it would be observed today. Additionally, we discuss the parity-violating effect of the gravitational wave signal induced by the Chern-Simons topological term.

axion-like field, chiral gravitational wave, early universe

PACS: 04.30.Db, 04.50.+h, 98.80.Cq

doi: [10.1360/SSPMA-2024-0088](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2024-0088)