

## 太极计划的弱光锁相地面实验验证及噪声分析

王晨<sup>1,2,3,4</sup>, 高雪荣<sup>4</sup>, 齐克奇<sup>4</sup>, 王少鑫<sup>4</sup>, 李磐<sup>4</sup>, 董鹏<sup>1</sup>, 刘河山<sup>4\*</sup>, 罗子人<sup>2,4</sup><sup>1</sup>国科大杭州高等研究院基础物理与数学科学学院, 浙江 杭州 310024;<sup>2</sup>中国科学院国家空间科学中心, 北京 100190;<sup>3</sup>中国科学院大学, 北京 100049;<sup>4</sup>中国科学院力学研究所, 北京 100190

**摘要** 在太极计划空间引力波探测任务中, 三颗卫星组成边长为 300 万公里的等边三角形编队。激光经过长距离传输后功率降至 nW 量级, 需要使用弱光锁相技术对激光相位幅值功率进行放大反射。为探索限制弱光锁相的主要噪声源, 同时为后续技术发展奠定基础, 本团队在地面开展了针对太极计划的弱光锁相验证实验, 给出了锁相环路的数学模型以及相关控制参数, 实现了实际任务中弱光、低载噪比条件下的稳定锁相。当弱光功率约为 0.49 nW、载噪比为 -86 dB-Hz 时, >0.02 Hz 频段范围内的锁相残余误差为  $6 \times 10^{-5}$  rad/Hz<sup>1/2</sup>, 实现了针对太极计划的弱光、低载噪比条件下的弱光锁相, 为后续开展全链路激光干涉测距实验奠定了基础。

**关键词** 弱光锁相; 太极计划; 载噪比噪声; 散粒噪声

中图分类号 O439

文献标志码 A

DOI: 10.3788/CJL241485

## 1 引言

自 2016 年美国激光干涉引力波天文台(LIGO)首次探测到引力波信号之后<sup>[1]</sup>, 各国都陆续开展了地面及空间引力波探测的相关研究。受噪声水平与干涉臂长的限制, 地面探测方案可接收到的引力波频段十分有限<sup>[2-4]</sup>, 因此, 科学家们逐渐将探测引力波的研究重心转移到空间引力波探测, 以获取频段更低的 mHz 引力波信号。

目前主要的空间引力波探测计划包括 LISA (Laser Interferometer Space Antenna) 计划<sup>[5]</sup>、太极计划<sup>[6]</sup>、天琴计划<sup>[7]</sup>等, 各计划在干涉臂长方面存在显著差异, 这是导致技术指标不同的关键因素之一。其中, 太极计划由三颗卫星组成, 每颗卫星沿日心轨道运行, 构成一个边长约为 300 万公里的巨大等边三角形, 其星座质心位于地球轨道上, 并与地球保持 20° 或 -20° 夹角。该计划采用星间激光外差干涉技术对 0.1 mHz~1 Hz 频段内的引力波信号进行探测<sup>[8]</sup>。为了实现引力波探测任务, 需要多种技术互相配合, 包括星间激光通信技术<sup>[9]</sup>、激光捕获跟瞄技术<sup>[10]</sup>、激光干涉技术、弱光锁相技术等。在太极计划中, 星载激光器的输出功率为瓦级水平, 但经过数百万公里传输后, 到达另一卫星探测器的激光功率仅为纳瓦量级<sup>[6]</sup>。这种极其微弱的光信号如果直接反射回远端卫星, 将导致其无法被有

效探测。太极计划对位移测量精度的要求极为苛刻, 需要优于 8 pm/Hz<sup>1/2</sup><sup>[6]</sup>。散粒噪声是影响测量精度的主要因素, 在弱光条件下其影响尤为明显。

弱光锁相技术的原理如下: 在本地卫星上将远端微弱激光与本地较强激光进行干涉, 利用相位计对产生的干涉信号实施相位解调<sup>[11-12]</sup>, 随后通过锁相环<sup>[13-14]</sup>及控制系统精准调控本地激光器, 使本地激光信号的相位稳定锁定于远端微弱激光的相位, 从而实现对远端弱光信号相位的精确复制。在此基础上, 用本地强激光替代原本的弱光信号并将其回传至远端卫星, 就可以巧妙地将双程功率衰减转化为单程功率衰减。这一策略为长基线激光干涉测量提供了可行的技术路径。值得注意的是, 在空间引力波探测任务中, 由于星间存在较大的相对运动速度, 多普勒频移效应显著且不可忽视<sup>[15]</sup>。为了准确分辨卫星的运动方向, 通常会采用外差锁相方案<sup>[16-17]</sup>。

最早开展弱光锁相技术研究的是 LISA 团队。1998 年, 该团队利用模拟锁相环, 在微弱的光功率 (17 nW) 下实现了  $5 \times 10^{-6}$  rad/Hz<sup>1/2</sup>@10~800 Hz 的锁相精度<sup>[18]</sup>, 这在目前采用模拟锁相环所能达到的锁相水平中是最接近散粒噪声极限 ( $3.3 \times 10^{-6}$  rad/Hz<sup>1/2</sup>) 的。德国 AEI 团队同样开展了模拟锁相环研究, 在更微弱的光功率 (31 pW) 环境下实现了  $2 \times 10^{-4}$  rad/Hz<sup>1/2</sup>@0.1~100 Hz 的锁相精度<sup>[16]</sup>。不过, 这一成果距离散粒

收稿日期: 2024-12-31; 修回日期: 2025-03-07; 录用日期: 2025-03-10; 网络首发日期: 2025-03-24

基金项目: 国家重点研发计划(2021YFC2202902, 2020YFC2200104)

通信作者: \*liuheshan@imech.ac.cn

噪声极限( $7.8 \times 10^{-5} \text{ rad/Hz}^{1/2}$ )仍有一定差距。澳大利亚国立大学则专注于优化锁相环模型,并借助两台超稳激光器,在最低光功率为 $1 \sim 7 \text{ fW}$ 的条件下成功保持了超过 $1000 \text{ s}$ 的稳定锁相状态<sup>[19]</sup>。随着研究的推进,国内多个团队也纷纷涉足弱光锁相领域,例如天琴团队<sup>[20]</sup>、清华大学<sup>[21-22]</sup>、哈尔滨工业大学<sup>[23]</sup>等。其中,清华大学于2023年运用数字锁相环,在光功率仅为 $9 \text{ pW}$ 的条件下将锁相精度提升至 $5.2 \times 10^{-4} \text{ rad/Hz}^{1/2}$  @  $> 3 \text{ Hz}$ <sup>[22]</sup>,这一结果已经非常接近散粒噪声极限( $1.4 \times 10^{-4} \text{ rad/Hz}^{1/2}$ ),但其低频性能还有待进一步提高。其他国内团队的研究成果与散粒噪声极限还存在一定差距。

综上所述,尽管国内外已针对 $\text{pW}$ 乃至 $\text{fW}$ 级弱光锁相技术进行了研究,但尚未达到散粒噪声极限,并且对限制性噪声机制缺乏深入探讨。本团队聚焦这一关键问题,进行了实验验证与分析,以期突破现有技术瓶颈提供理论依据。本文的具体章节安排如下:第二部分阐述太极计划弱光锁相技术的原理,重点介绍关键参数的选择依据;第三部分详细描述地面验证实验系统的设计,涵盖主要技术参数与实现方案;第四部分展示弱光、低载噪比条件下的实验结果,并分析激光频率抖动噪声、温度噪声、散粒噪声、载噪比噪声等对锁

相残余相位误差的影响。

## 2 太极计划弱光锁相原理及参数

在太极计划中,卫星发射出的激光功率 $P_0$ 约为 $1.2 \text{ W}$ 。由于激光发射角的存在,从远端卫星发射出的激光经 $300 \text{ 万公里}$ 传输后,激光的光斑直径将达到 $20 \text{ km}$ <sup>[24]</sup>,而太极计划中卫星上的望远镜口径仅为分米量级,因此远端卫星接收到的激光功率( $P_i$ )将变得十分微弱。 $P_i$ 的表达式<sup>[25]</sup>可表示为

$$P_i = \epsilon \frac{D^4}{L^2 \lambda^2} P_0 \quad (1)$$

式中: $\epsilon$ 为太极计划中的总光学效率, $\epsilon=0.3$ ; $\lambda$ 为激光波长, $\lambda=1064 \text{ nm}$ ; $L$ 为星间距, $L=3 \times 10^9 \text{ m}$ ; $D$ 为望远镜口径, $D=40 \text{ cm}$ 。该公式的计算结果与仿真模拟结果十分接近<sup>[24]</sup>。根据上述参数,远端卫星探测器最终接收到的功率 $P_i$ 约为 $1 \text{ nW}$ 。若采用直接反射的方式返回信号,则光强将进一步衰减至原来的 $1/10^9$ 。这种极微弱的光信号已超出当前技术水平的检测极限。

空间引力波探测任务中两星之间干涉测距的原理如图1所示。图中, $L$ 表示两卫星偏振分光镜(PBS)之间的距离, $L_R$ 是从卫星2偏振分光镜到测试质量(TM)之间的距离。

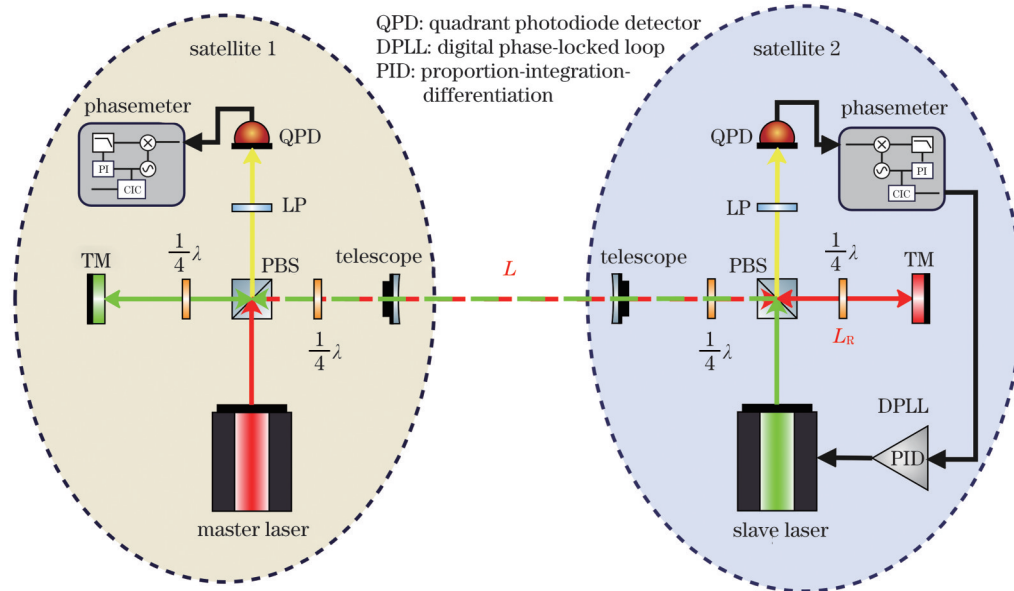


图1 双星激光干涉测距原理图

Fig. 1 Schematic of a double-star laser interferometric ranging

如图1所示,卫星1发出的主激光可表示为 $A \cos(\omega_1 t + \theta_1)$ ,卫星2发出的从激光可表示为 $B \cos(\omega_2 t + \theta_2)$ ,其中LP为线性偏振片, $A$ 和 $B$ 分别为主激光和从激光的振幅, $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 分别为主激光和从激光的频率, $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 分别为主激光和从激光的相位。主激光经过长距离传输进入卫星2后变为P偏振,透过偏振分光镜时可表示为 $A \cos[(\omega_1 + \omega_D)t + (\theta_1 + 2\pi L/\lambda)]$ ,其中 $\omega_D$ 为多普勒频移。该主

激光信号经测试质量反射并两次穿过四分之一波片后与本地激光发生干涉。干涉前,主激光信号的表达式为 $A \cos\{(\omega_1 + \omega_D)t + [\theta_1 + 2\pi(L + 2L_R)/\lambda]\}$ ,干涉后的差频信号为 $\cos(\Delta\omega t + \Delta\theta)$ ,其中 $\Delta\omega = \omega_1 + \omega_D - \omega_2$ , $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 + 2\pi(L + 2L_R)/\lambda$ 。若此时开始弱光锁相过程,锁相环能够迅速将本地激光的相位锁定至从测试质量反射回来的微弱主激光的相位,此

时从激光信号变为  $B \cos\left\{(\omega_1 + \omega_D + \omega_{\text{off}})t + \left[\theta_1 + 2\pi(L + 2L_R)/\lambda\right]\right\}$ , 其中  $\omega_{\text{off}}$  为外差频率。这束经过锁定处理的强激光信号随后由卫星 2 传输回卫星 1, 并在卫星 1 处再次经历相同的弱光锁相过程, 最终转发给另一颗卫星, 实现空间测距与弱光锁相过程的完整闭环。

由于轨道导致的卫星间运动, 多普勒频移的影响不可忽略, 其计算公式<sup>[15]</sup>为

$$\Delta f_{\text{Doppler}} \approx \frac{2f_0}{c/n} \Delta v = \frac{2n}{\lambda} \Delta v \quad (2)$$

式中:  $f_0$  为激光频率;  $c$  为真空中的光速;  $n$  为折射率, 真空下折射率为 1, 大气环境 (20 °C) 下约为 1.000272;  $\lambda$  是激光在真空中的波长;  $\Delta v$  是星间相对速度。多普勒频移与两星之间的相对速度直接相关, 不同臂长、不同轨道方案下的星间相对速度也有所不同<sup>[26-27]</sup>, 如表 1 所示。因此, 不同计划的外差频率也并不完全一致。太极计划的卫星运行于绕日轨道, 两星间干涉臂长为 300 万公里, 两星间相对位移速度在 m/s 量级, 因此多普勒频移范围为 5~25 MHz。综合考虑后, 选取其中间值 15 MHz 作为外差中心频率。

表 1 不同空间引力波探测计划中的臂长与相对速度  
Table 1 Arm length and relative velocity for different space-based gravitational wave detection programs

| Program | Arm length /m          | Maximum relative velocity /(m/s) |
|---------|------------------------|----------------------------------|
| Taiji   | $3 \times 10^9$        | $\pm 10$                         |
| LISA    | $2.5 \times 10^9$      | $\pm 10$                         |
| Tianqin | $\sqrt{3} \times 10^5$ | $\pm 5$                          |

### 3 地面验证实验系统及控制参数设计

#### 3.1 地面验证实验方案设计及系统搭建

为了在地面进行弱光锁相功能的验证, 本研究对星间弱光锁相系统进行了简化。地面验证系统并未构建超长干涉臂, 但其在外差频率方面与太极计划实际使用的频率保持一致。此外, 地面验证系统没有锁定测试质量反射回的主激光相位, 而是直接锁定主激光的相位。对于弱光锁相系统的功能验证而言, 这种方式与实际锁相条件下的效果相同。

弱光锁相地面验证实验方案如图 2 所示, 系统所用设备实物图如图 3 所示, 实验中各设备的主要参数如表 2 所示。

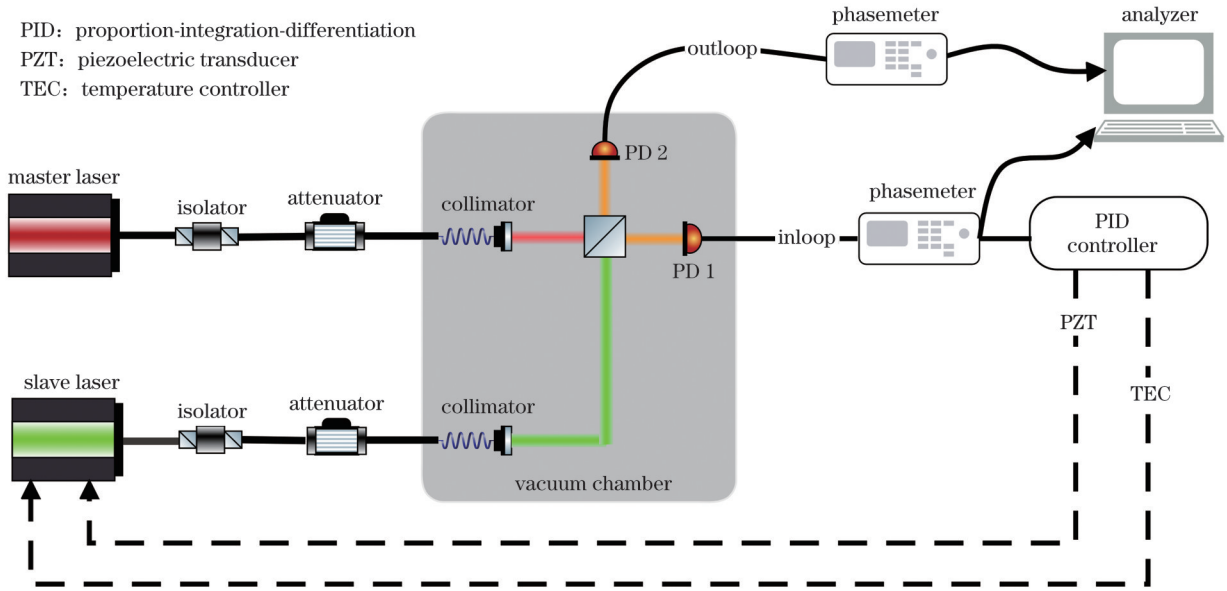


图 2 实验方案设计图

Fig. 2 Experimental program design diagram

在模拟实际星间干涉场景时, 主激光器用于模拟远端卫星的激光器, 而从激光器则用于模拟本地激光器。实验系统中的主激光和从激光电场信号可以分别表示为

$$E_1(t) = \sqrt{2P_1} \cos(\omega_1 t + \theta_1) \quad (3)$$

$$E_2(t) = \sqrt{2P_2} \cos(\omega_2 t + \theta_2) \quad (4)$$

式中:  $P_1$ 、 $P_2$  分别为主从激光的光功率;  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  分别为主从激光的频率;  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  分别为主从激光的相位。由于光强正比于电场强度的平方, 因此, 主从激光的瞬时光

强分别为

$$I_1(t) = E_1^2 = 2P_1 \cos^2(\omega_1 t + \theta_1) \quad (5)$$

$$I_2(t) = E_2^2 = 2P_2 \cos^2(\omega_2 t + \theta_2) \quad (6)$$

两束激光经过不同程度的衰减后接入真空罐中的四片干涉仪, 该干涉仪采用传统的光机结构, 由 4 个熔融石英分束器 (BS) 通过环氧树脂粘接在殷钢底座上, 使用固定卡扣将四片干涉仪稳定地固定在隔振气浮平台上。实验中, 两束激光干涉后, 分束器每一端的瞬时光强可以表示为

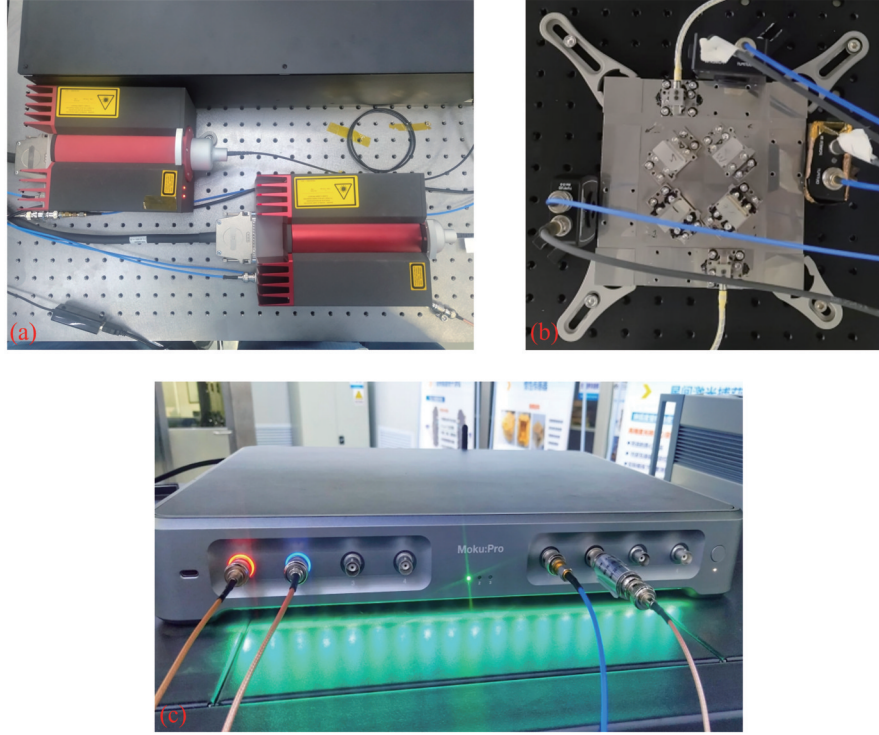


图 3 系统实物图。(a)激光器;(b)四片干涉仪和光电探测器;(c)Moku: Pro 集成控制器

Fig. 3 System physical drawing. (a) Laser; (b) four-chip interferometer and photodetector; (c) Moku: Pro integrated controller

表 2 实验设备的主要参数

Table 2 Main parameters of the experimental equipment

| Experimental equipment                              | Main parameter   |
|---|--|
| Laser<br>(Mephisto 500NEFC)                         | Wavelength: 1064 nm<br>PZT port adjustment rate: 1 MHz/V<br>TEC port adjustment rate: -3 GHz/V<br>PZT port response bandwidth: 100 kHz<br>TEC port response bandwidth: 1 Hz  |
| Photodetector<br>(Thorlabs APD430M/C)               | Response bandwidth: 0-400 MHz<br>Adjustable gain range: 4-20<br>APD responsivity: 12 A/W<br>Transimpedance amplifier resistor: 5000 Ω/10000 Ω  |
| Phasor, PID controller, acquisition card (Moku:Pro) | Number of input connectors: 4<br>Input interface maximum bandwidth: 600 MHz<br>Maximum sampling rate of input interface: 1.25 GSa/s<br>Number of output connectors: 4<br>Output interface sample rate: 1.25 GSa/s<br>ADC quantization bits: 10 bit |

$$I_3(t) = P_1 \cos^2(\omega_1 t + \theta_1) + P_2 \cos^2(\omega_2 t + \theta_2) + 2\sqrt{P_1 P_2} \cos(\omega_1 t + \theta_1) \cos(\omega_2 t + \theta_2) = P_1 \cos^2(\omega_1 t + \theta_1) + P_2 \cos^2(\omega_2 t + \theta_2) + \sqrt{P_1 P_2} \{ \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + (\theta_1 + \theta_2)] + \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (\theta_1 - \theta_2)] \} \quad (7)$$

由于激光频率处于 THz 级别,而探测器的响应带宽往往最多只能达到 GHz,因此无法直接探测到式(7)中的高频分量 $(\omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2)$ ,只能用时间平均来替代。因此,式(7)可化为

$$\langle I_3(t) \rangle = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) + \sqrt{P_1 P_2} \cos(\Delta\omega t + \Delta\theta), \text{ where } \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2, \Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 \quad (8)$$

用两个光电探测器(PD)分别探测分束器两端的两束干涉信号,光电探测器将光信号转换成电信号。转换公式为

$$u(t) = \frac{R_a R_F}{2} (P_1 + P_2) + R_a R_F \sqrt{P_1 P_2} \cos(\Delta\omega t + \Delta\theta) \quad (9)$$

式中:  $R_{\lambda_0}$  为波长  $\lambda_0$  下的响应度;  $R_F$  为跨阻放大系数。将两束电信号中的一束作为环外信号送入相位计中, 将另一束作为环内信号, 其经过相位计对相位进行解调后输入比例-积分-微分(PID)控制环路中。相位计的基本原理如图 4 所示。光电探测器输出的电信号与本地数控振荡器(NCO)生成的频率信号进行拍频, 随后通过低通滤波器去除高频信号成分, 得到式(10)所示的结果。

$$U(t) = E \cos[(\omega_1 - \omega_2 - \omega_{\text{NCO}})t + \theta_1 - \theta_2 - \theta_{\text{NCO}}] \quad (10)$$

式中:  $\omega_{\text{NCO}}$ 、 $\theta_{\text{NCO}}$  分别是数控振荡器生成的信号的频率和相位。接着采用调制解调算法将拍频后的相位信息提取出来, 将环内信号与设定外差信号的相位差作为后续 PID 控制环路的误差信号。PID 控制环路输出的两路控制信号分别作用于从激光器的压电陶瓷(PZT)端口和温度(TEC)端口, 以不同的速率调整从激光器的频率, 从而实现从激光器对主激光器的“跟踪锁定”和“相位复制”功能。实验中使用 Liquid Instruments 公司生产的 Moku: Pro 硬件集成平台实现相位测量、PID 控制和数据采集功能。该设备可以在一张现场可编程门阵列(FPGA)板上同时运行多种模块, 避免了使用多台仪器时面临的时钟噪声与同步问题。采集到的环内和环外信号将在数据分析器(即计算机)中进行进一步分析处理, 借助 MATLAB 结合 AEI 开发的 LTPDA Toolbox 工具箱<sup>[28]</sup>, 对太极计划地面验证实验系统中的锁相残余相位误差幅度谱密度进行深入分析。

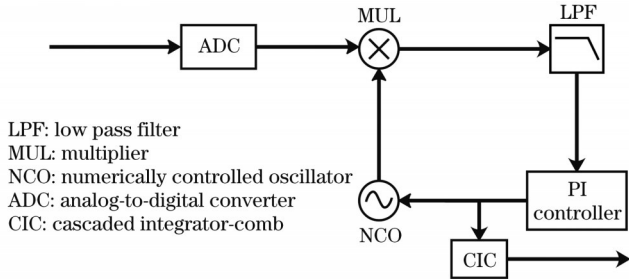


图 4 相位计的原理

Fig. 4 Schematic of phasemeter

实验中需要改变弱光功率开展对比实验。真空舱工作时, 无法直接使用光功率计测量干涉仪中的光功率, 因此需要采用别的方式计算光功率。由式(9)可知光电探测器输出的电压信号包含直流分量与交流分量, 可以利用这个特性反推出弱光条件下的光功率。计算过程如下:

- 1) 关闭弱光( $P_1$ ), 打开强光( $P_2$ ), 读取此时光电探测器的直流信号并将其记作  $u_2$ ;
- 2) 打开弱光( $P_1$ ), 保持强光开启, 读取此时光电探测器交流信号的峰峰值并将其记作  $u_{pp}$ ;
- 3) 根据式(8), 由直流项先反推出强光功率  $P_2 = \frac{2u_2}{R_{\lambda_0} R_F}$ , 再由交流项反推出弱光功率  $P_1 = \left(\frac{u_{pp}}{2R_{\lambda_0} R_F}\right)^2 \frac{1}{P_2}$ 。

$$P_1 = \left(\frac{u_{pp}}{2R_{\lambda_0} R_F}\right)^2 \frac{1}{P_2}$$

这样, 即使在无法直接测量的情况下也能准确获取弱光功率, 从而确保了实验数据的有效性和可靠性。

### 3.2 控制环路模型及关键参数

本系统通过相位计识别主从激光器的拍频信号并解调出其与设定参考外差频率(15 MHz)之间的相位差  $\Delta\varphi$ , 将此相位差作为后端 PID 控制环路中的输入信号。系统的控制环路模型如图 5 所示。在 PID 控制环路中, 相位信号与参考设定值相减得到误差信号。当参考设定值为 0 时, 系统将锁定在与参考外差频率相同的零相位点; 改变参考设定值, 可以锁定在不同的相位点上。控制环路中包含两个 PI 控制器, 分别用于调节激光器的 PZT 端口和 TEC 端口。由于 PZT 端口和 TEC 端口的响应频率及控制范围存在差异, 因此这两个 PI 控制器的参数设置也有所不同, 以确保其各自的有效控制。

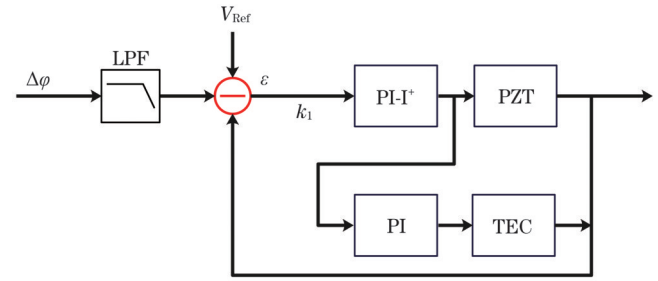


图 5 PID 控制环路图

Fig. 5 PID control loop diagram

四阶巴特沃斯低通滤波器的传递函数为

$$F_{\text{LPF}}(s) = \frac{\Omega_{\text{cut}}^4}{s^4 + a_3 \Omega_{\text{cut}} s^3 + a_2 \Omega_{\text{cut}}^2 s^2 + a_1 \Omega_{\text{cut}} s + a_0 \Omega_{\text{cut}}^4} \quad (11)$$

式中:  $\Omega_{\text{cut}} = 2\pi f_{\text{cut}}$ ,  $f_{\text{cut}}$  为低通滤波器的截止频率;  $s$  为复频率变量;  $a_0, a_1, a_2, a_3$  为阻尼系数。

本系统为双环路 PID 控制系统, PZT 端使用比例-积分-双重积分控制(PI-I<sup>+</sup>), TEC 端使用比例-积分控制(PI)。PZT 端的控制传递函数为

$$C_{\text{PZT}}(s) = k_{\text{PZT}} \left(1 + \frac{2\pi f_{\text{PZT-I}}}{s}\right) \left(1 + \frac{2\pi f_{\text{PZT-I}^+}}{s}\right) \quad (12)$$

TEC 端的控制传递函数为

$$C_{\text{TEC}}(s) = k_{\text{TEC}} \left(1 + \frac{2\pi f_{\text{TEC-I}}}{s}\right) \quad (13)$$

由于激光器的 PZT 控制端口和 TEC 控制端口有其各自的响应频率, 无法响应不在其带宽内的控制信号, 因此 PZT 和 TEC 控制端口在控制环路中可以等效为两个不同截止频率的低通滤波器。这两个低通滤波器的传递函数分别为

$$P(s) = \frac{2\pi f_{\text{PZT-cut}} k_2 k_3}{s(2\pi f_{\text{PZT-cut}} + s)} \quad (14)$$

$$T(s) = \frac{2\pi f_{\text{TEC-cut}} k_4 k_5}{s(2\pi f_{\text{TEC-cut}} + s)} \quad (15)$$

式中： $f_{\text{PZT-cut}}$  是激光器 PZT 端口的响应带宽， $f_{\text{PZT-cut}} = 100 \text{ kHz}$ ； $k_2$  是激光器 PZT 端口的频率-电压调谐系数， $k_2 = 1 \text{ MHz/V}$ ； $k_3$  是 PZT 控制端口输出电压的增益系数， $k_3 = +14 \text{ dB}$ ； $f_{\text{TEC-cut}}$  是激光器 TEC 端口的响应带宽， $f_{\text{TEC-cut}} \approx 1 \text{ Hz}$ ； $k_4$  是激光器 TEC 端口的频率-电压调谐系数， $k_4 = -3 \text{ GHz/V}$ ； $k_5$  是 TEC 控制端口输出电压的增益系数， $k_5 = -30 \text{ dB}$ 。

系统的开环传递函数为

$$G(s) = k_1 F_{\text{LPF}}(s) C_{\text{PZT}}(s) [P(s) + C_{\text{TEC}}(s) T(s)] \quad (16)$$

闭环传递函数为

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{k_1 F_{\text{LPF}}(s) C_{\text{PZT}}(s) [P(s) + C_{\text{TEC}}(s) T(s)]}{1 + k_1 F_{\text{LPF}}(s) C_{\text{PZT}}(s) [P(s) + C_{\text{TEC}}(s) T(s)]} \quad (17)$$

误差传递函数为

$$H_e(s) = \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + k_1 F_{\text{LPF}}(s) C_{\text{PZT}}(s) [P(s) + C_{\text{TEC}}(s) T(s)]} \quad (18)$$

上述控制环路模型中的相关参数见表 3。

表 3 PID 控制环路参数  
Table 3 PID Control loop parameters

| Part                    | Parameter name                                      | Value     | Unit     |
|-------------------------|---|-----------|----------|
| General                 | Sampling frequency $f_{\text{sampling}}$            | 78.125    | MHz      |
|                         | Quantization $N$                                    | 24        | bit      |
|                         | Phase amplification factor $k_1$                    | 120       | mV/cycle |
| LPF (Butterworth)       | Cutoff frequency $f_{\text{cut}}$                   | 50        | kHz      |
|                         | $a_0$   | 1         |          |
|                         | $a_1$   | 2.6131259 |          |
|                         | $a_2$   | 3.4142136 |          |
|                         | $a_3$   | 2.6131259 |          |
| PI-I <sup>+</sup> (PZT) | Proportional gain $k_{\text{PZT}}$                  | -28       | dB       |
|                         | Integrator crossover frequency $f_{\text{PZT-I}}$   | 8         | kHz      |
|                         | Integrator crossover frequency $f_{\text{PZT-I}^+}$ | 300       | Hz       |
| PI (TEC)                | Proportional gain $k_{\text{TEC}}$                  | -40       | dB       |
|                         | Integrator crossover frequency $f_{\text{TEC-I}}$   | 500       | mHz      |

## 4 结果与讨论

### 4.1 实验结果

为了模拟实际空间干涉情况下远端激光信号较弱而本地激光信号较强的情形，考虑到光电探测器最大探测光功率的限制，在实验中将本地激光（从激光）的功率固定为  $20 \mu\text{W}$ ，并在  $0.49 \text{ nW} \sim 20 \mu\text{W}$  的主激光（远端激光）功率范围内进行了锁定实验。实验过程中，真空舱内的压强约为  $10 \text{ Pa}$ ，并且关闭了真空舱内的灯光，同时选择在夜晚实验室无人时进行实验。由于探测器本底噪声和测量精度的限制，实验中最低可选的光功率为  $0.49 \text{ nW}$ 。

锁相系统输出两路信号，分别为环内和环外信号。其中，环内信号经过锁相环，噪声会被进一步压低，其反映的是数字锁相环的电子学性能。而实际用于空间引力波探测中反射回远端卫星的是环外信号，因此这里只讨论环外信号。图 6 展示了不同光功率下残余锁定相位误差幅度谱密度。实验结果显示，在不同的光功率条件下，系统的相位锁定精度存在差异。这主要

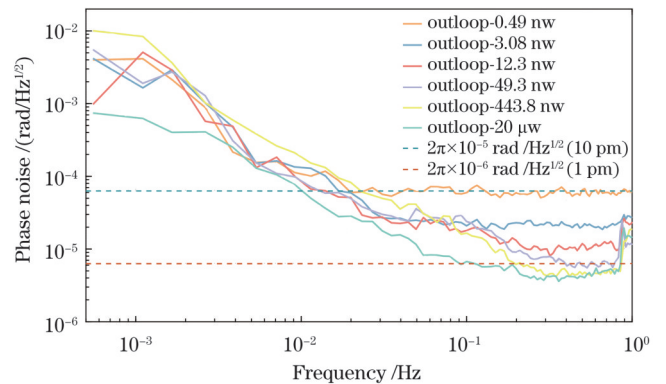


图 6 不同功率下的残余锁定相位误差幅度谱密度  
Fig. 6 Amplitude spectral density (ASD) of residual locked phase error at different powers

是因为不同功率水平下的主导噪声类型有所不同。当弱光功率为  $0.49 \text{ nW}$  时，本系统在  $>0.2 \text{ Hz}$  频段范围内的锁相残余误差为  $6 \times 10^{-5} \text{ rad/Hz}^{1/2}$  ( $10 \text{ pm}$ )。

### 4.2 噪声分析

弱光锁相系统中存在多种噪声源，如散粒噪声、载

噪比噪声及相位计噪声等<sup>[29]</sup>,这些不同类型的噪声对系统锁相残余相位误差的影响有所不同。接下来将对上述提及的各类噪声进行深入且详细的剖析。

### 1) 散粒噪声

探测器散粒噪声源于光的量子特性。探测器接收到的光子数是服从泊松分布的随机变量<sup>[30]</sup>,当光强很弱时,这种不确定性噪声尤为显著。其公式<sup>[31]</sup>为

$$S_{\text{shot}} = \sqrt{\frac{hc}{\lambda P}} \quad (19)$$

式中: $h$ 是普朗克常量; $c$ 是真空光速; $\lambda$ 是激光波长; $P$ 是激光功率。在实验中,强光功率 $P_2$ 远大于弱光功率 $P_1$ ,因此由强光引起的散粒噪声远小于弱光引起的散粒噪声。鉴于此,在分析过程中仅关注弱光贡献的散粒噪声。当光强为 0.49 nW 时,散粒噪声为  $1.95 \times 10^{-5} \text{ rad/Hz}^{1/2}$ 。

根据图 6 所示的实验结果,当前测得的弱光锁相残余相位误差尚未达到理论上的散粒噪声极限。值得注意的是,随着弱光功率的变化,实验结果并未稳定在一个固定的本底噪声水平附近波动,而是呈现出随光功率增加而逐渐减小的趋势,这一现象与散粒噪声的特性高度相似。由此可以推断,在本系统中除了散粒噪声之外,还存在一种不可忽视的噪声源,其强度与光功率呈反比关系。

### 2) 载波信噪比噪声

本系统所用探测器的噪声等效功率(NEP)为 0.45 pW/Hz<sup>1/2</sup>,经推导得太极计划中的弱光功率约为 1 nW。为模拟空间引力波探测中的实际星间低载噪比信号,选取最低的弱光功率为 0.49 nW,这是经实验测得的能够实现锁定的最低光功率。由载噪比引起的

相位噪声为<sup>[27]</sup>

$$S_{\text{CNR}} = \sqrt{10^{\frac{C}{N_0}} \cdot 10} \quad (20)$$

式中: $N_0$ 为噪声功率谱密度; $C$ 为载波功率。在弱光功率为 0.49 W 时,用频谱仪测得载波功率  $C = -42.7 \text{ dBm}$ ,噪声功率谱密度  $N_0 = -128.7 \text{ dBm/Hz}$ ,此时的载噪比  $C/N_0 = -86 \text{ dB-Hz}$ ,相位噪声为  $5.01 \times 10^{-5} \text{ rad/Hz}^{1/2}$ ,此噪声不可忽略。从图 7 可以看出,在弱光、低载噪比条件下,相较于散粒噪声,实验测得的最低残余相位误差更接近载噪比噪声。

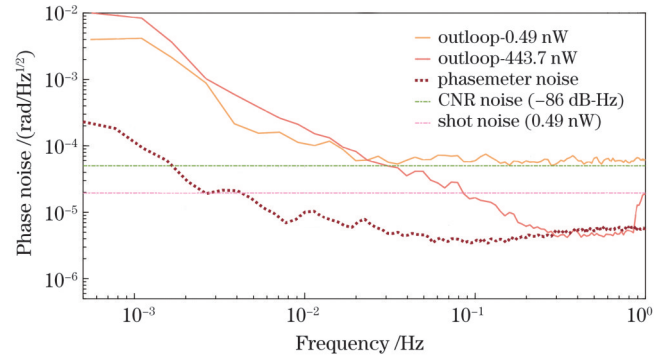


图 7 弱光锁相噪声分析图

Fig. 7 Weak light phase-locking noise analysis

光功率改变时,信号的载噪比也会相应发生变化。为进一步研究载噪比噪声对弱光锁相残余相位误差的影响,在不同弱光功率(0.49~49.3 nW)下开展实验。使用 Agilent Technologies 公司的 N9020A 型频谱仪测量干涉信号的载波功率和本底噪声,结果如表 4 所示。可以看出,随着载噪比增加,载噪比噪声相应降低,并且始终十分接近实验所测得的最低残余相位误差。

表 4 不同弱光功率下测得的相位噪声

Table 4 Measured phase noise at different weak-light powers

| Weak-light power /nW | Carrier power C /dBm | Noise power spectrum density $N_0$ /(dBm/Hz) | CNR noise $S_{\text{CNR}}$ / (rad/Hz <sup>1/2</sup> ) | Shot noise $S_{\text{shot}}$ / (rad/Hz <sup>1/2</sup> ) | Experimental results / (rad/Hz <sup>1/2</sup> ) |
|----------------------|----------------------|--|---|---|---|
| 0.49                 | -42.7                | -128.7                                       | $5.01 \times 10^{-5}$                                 | $1.95 \times 10^{-5}$                                   | $6 \times 10^{-5}$                              |
| 3.08                 | -30.4                | -128.7                                       | $1.22 \times 10^{-5}$                                 | $7.78 \times 10^{-6}$                                   | $1.9 \times 10^{-5}$                            |
| 12.33                | -26.21               | -128.7                                       | $7.51 \times 10^{-6}$                                 | $3.89 \times 10^{-6}$                                   | $9.5 \times 10^{-6}$                            |
| 49.31                | -19.5                | -128.7                                       | $3.47 \times 10^{-6}$                                 | $1.95 \times 10^{-6}$                                   | $5.5 \times 10^{-6}$                            |

影响载噪比噪声的因素是载波功率和噪声幅度谱密度,而这两者在很大程度上取决于实际器件的性能。探测器的增益和探测精度对载波功率具有显著影响,当弱光功率接近探测器的测量极限时,载波信号质量将大幅下降,进而导致载噪比显著降低<sup>[32]</sup>。

### 3) 相位计噪声

该部分噪声主要源于相位计中的电子学噪声,而相位测量噪声直接决定了整套锁相系统的最低相位分辨精度。这类噪声涵盖多个方面,如 ADC 量化噪声、

相位读出噪声、时钟抖动噪声、热噪声以及前端电路噪声等。为了评估相位计的本底噪声,采用信号发生器生成射频信号并将其作为测试信号。通过这种方式可以测量并获取上述各类噪声综合叠加后形成的相位计的整体噪声水平。从图 7 可以看出,相位计噪声在低频处对系统的影响很小,在  $>0.1 \text{ Hz}$  频段内,相位计噪声是限制干涉系统测量精度的主要因素。

### 4) 其他噪声

在本系统中,除了上述三种噪声外,还需要考虑其他噪声源对系统性能的影响。这些额外的噪声包括激

光器自身的频率抖动噪声、由臂长不等引起的激光频率噪声以及由温度波动引起的噪声。接下来对这三种噪声进行详细分析。

激光器的频率抖动噪声源于其受温度、振动等影响而造成的激光频率漂移,即使激光器锁定后,激光频率也在一定范围内波动,不是一个绝对稳定的值。这种频率波动会向锁相回路中引入残余相位噪声。激光器频率波动引起的本征相位噪声在低频段的相位噪声功率谱密度为  $S_p(f) = (k_a/f^3)^{\frac{1}{2}}$ <sup>[33]</sup>,其中  $k_a$  为激光器常数。主从激光器都存在这种噪声,但在本实验中,主激光器处于自由运转状态,其频率漂移可以模拟实际引力波探测任务中的信号波动。因此,这里只需要考虑从激光器的本征相位噪声,从激光器频率噪声引起的相位误差会作为误差信号一起进入控制环路,属于环内噪声。其最终在系统中引起的锁相残余相位误差公式为

$$S_{\phi_{\text{res}}} = \sqrt{S_p(f)} \frac{1}{1+G(s)} = \sqrt{\frac{k_a}{f^3}} \frac{1}{1+G(s)} \quad (21)$$

式中:  $G(s)$  为系统开环传递函数,  $G(s)|_{f=1\text{mHz}} \approx 322\text{dB}$ 。从激光器的相位噪声幅度谱密度  $S_p = 3 \times 10^{10}\text{rad/Hz}^{1/2}@1\text{mHz}$ ,由激光器频率抖动引起的锁相残余相位误差约为  $2.5 \times 10^{-6}\text{rad/Hz}^{1/2}$ ,锁相回路能够有效抑制这部分噪声,因此从激光器的频率抖动噪声在本系统中可以忽略不计。

激光频率噪声源于不等臂长引起的相位差<sup>[34]</sup>,在实际的空间引力波探测中,多个干涉仪之间的臂长差异不可避免,该噪声需要展开讨论。本系统仅涉及单个干涉仪,并且环内和环外两路信号源自同一分束器两端的干涉信号。尽管两束激光在干涉前存在臂长差异,但由此产生的相位差是固定的。对于弱光锁相系统而言,从激光并非必须锁定在主激光的零相位点上,而是可以稳定在其他相位点上。实验结果也表明,从激光锁定在不同的相位点时,系统的锁相精度没有显著差异。因此,在这种情况下,由不等臂长引起的激光频率噪声可以不予考虑。

尽管实验过程中真空舱内的真空度很高,能够有效降低热对流引起的温度噪声,但热辐射引起的温度噪声仍然无法完全消除。温度的缓慢漂移会导致设备之间的相对位移发生变化,这对精度达到 pm 量级的干涉测距来说是一个不可忽视的影响因素。同时,温度漂移还会改变设备的工作状态,进而引入相应的相位噪声。这部分噪声难以避免,只能通过后续的相关性分析和数据解耦方法,在数据后处理过程中尽量减小其影响。通常,温度噪声在低频 ( $<0.1\text{mHz}$ ) 范围内的影响最为显著,而在高频区域则可以忽略不计。

综上所述,在实验中,当弱光功率为  $0.49\text{nW}$ 、载噪比为  $-86\text{dB-Hz}$  时,测得的锁相残余相位误差最低

为  $6 \times 10^{-5}\text{rad/Hz}^{1/2}$ ,这一数值十分接近载噪比噪声 ( $5.01 \times 10^{-5}\text{rad/Hz}^{1/2}$ )。这表明,在弱光、低载噪比条件下,系统的最主要噪声源是载噪比噪声,其次为散粒噪声。当光功率为  $1.7\mu\text{W}$  时,测得锁相残余相位误差最低为  $4.5 \times 10^{-6}\text{rad/Hz}^{1/2} (<1\text{pm/Hz}^{1/2})$ ,达到了相位计的测量极限。这说明在强光条件下相位计的测量噪声成为最主要的噪声源。

## 5 结 论

为了推进太极计划中的空间引力波探测项目,本团队针对星间激光干涉技术进行了深入研究。为了在地面上最大程度地模拟空间环境,搭建了弱光锁相系统,并建立了该系统数字锁相环的数学模型,推导了控制环路的传递函数,确定了控制系统的详细参数。实验结果显示:在载噪比为  $-86\text{dB-Hz}$ 、弱光功率为  $0.49\text{nW}$  的条件下,锁相残余相位误差为  $6 \times 10^{-5}\text{rad/Hz}^{1/2}@0.2\text{Hz}$ ;在光功率为  $1.7\mu\text{W}$  时,锁相残余相位误差为  $4.5 \times 10^{-6}\text{rad/Hz}^{1/2}@0.5\text{Hz}$ ,达到了相位计测量噪声极限。这一结果验证了弱光锁相控制环路的优异性能。不同条件下影响锁相精度的主要因素有所不同:在低载噪比、弱光条件下,载噪比噪声是限制高频段弱光锁相系统锁相精度的最主要因素;在强光条件下,相位计噪声是限制高频段弱光锁相系统极限相位分辨精度的主要因素。低频段下限制弱光锁相残余相位误差的因素为温度漂移。

## 参 考 文 献

- [1] Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger[J]. Physical Review Letters, 2016, 116(6): 061102.
- [2] Weber J. Detection and generation of gravitational waves[J]. Physical Review, 1960, 117(1): 306-313.
- [3] Weber J. Evidence for discovery of gravitational radiation[J]. Physical Review Letters, 1969, 22(24): 1320-1324.
- [4] Weber J. Anisotropy and polarization in the gravitational-radiation experiments[J]. Physical Review Letters, 1970, 25(3): 180-184.
- [5] Danzmann K. LISA mission overview[J]. Advances in Space Research, 2000, 25(6): 1129-1136.
- [6] Hu W R, Wu Y L. The Taiji Program in space for gravitational wave physics and the nature of gravity[J]. National Science Review, 2017, 4(5): 685-686.
- [7] Luo J, Chen L S, Duan H Z, et al. Tianqin: a space-borne gravitational wave detector[J]. Classical and Quantum Gravity, 2016, 33(3): 035010.
- [8] Luo Z R, Guo Z K, Jin G, et al. A brief analysis to Taiji: science and technology[J]. Results in Physics, 2020, 16: 102918.
- [9] 张艺斌, 邓汝杰, 刘河山, 等. 太极计划星间激光通信参数设计及实验验证[J]. 中国激光, 2023, 50(23): 2306002. Zhang Y B, Deng R J, Liu H S, et al. Parameter design and experimental verification of Taiji Program inter-satellite laser communication[J]. Chinese Journal of Lasers, 2023, 50(23): 2306002.
- [10] 赵梦阳, 高瑞弘, 张强涛, 等. 太极计划激光链路构建地面模拟控制系统研究[J]. 中国激光, 2023, 50(19): 1906003. Zhao M Y, Gao R H, Zhang Q T, et al. Research on simulated

- laser link construction control system of Taiji Program[J]. Chinese Journal of Lasers, 2023, 50(19): 1906003.
- [11] Yang R, Liu H S, Luo Z R. Optimization design of decimation filter for the phasemeter in the space gravitational wave detection [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2024, 73: 7006508.
- [12] 张强涛, 刘河山, 罗子人. 面向空间激光干涉的多通道相位测量系统[J]. 中国光学(中英文), 2023, 16(5): 1089-1099.  
Zhang Q T, Liu H S, Luo Z R. Multi-channel phase measurement system for the space laser interferometry[J]. Chinese Optics, 2023, 16(5): 1089-1099.
- [13] Xu Z X, Huang K K, Lu X H. A digital optical phase-locked loop based on field programmable gate array and its applications[C]// 2014 International Conference on Information Science, Electronics and Electrical Engineering, April 26–28, 2014, Sapporo, Japan. New York: IEEE Press, 2014: 795-799.
- [14] Gerberding O, Sheard B, Bykov I, et al. Phasemeter core for intersatellite laser heterodyne interferometry: modelling, simulations and experiments[J]. Classical and Quantum Gravity, 2013, 30(23): 235029.
- [15] Yan H, Chen L Y, Xu Z L, et al. All-fiber heterodyne velocity and displacement interferometer based on DPLL Doppler tracking with sub-nanometer per second and picometer sensitivity[J]. Applied Optics, 2022, 61(32): 9569-9575.
- [16] Diekmann C, Steier F, Sheard B, et al. Analog phase lock between two lasers at LISA power levels[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2009, 154(1): 012020.
- [17] Luo Z, Liu H S, Wang J, et al. Recent development of a laser interferometer for Taiji space gravitational wave detection[EB/OL]. [2024-12-12]. <https://www.researchsquare.com/article/rs-4776951/v1>.
- [18] McNamara P W, Ward H, Hough J. Laser phase-locking techniques for LISA: experimental status[C]//AIP Conference Proceedings, 1998, 456: 143-147.
- [19] Sambridge C S, Roberts L E, Wade A R, et al. Subfemtowatt laser phase tracking[J]. Physical Review Letters, 2023, 131(19): 193804.
- [20] 姜宗显. 外差式弱光锁相方案设计与初步实验测试[D]. 武汉: 华中科技大学, 2015.  
Jiang Z X. Design and preliminary test of heterodyne weak light optical phase locking[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2015.
- [21] Liao A C, Ni W T, Shy J T. Pico-watt and femto-watt weak-light phase locking[J]. International Journal of Modern Physics D, 2002, 11(7): 1075-1085.
- [22] Mu H L, Le T R, Xu X, et al. High-precision digital optical phase locking for  $10^{-12}$  W order weak light for a spaceborne gravitational wave interferometer[J]. Applied Optics, 2023, 62(20): 5494-5501.
- [23] 陈扬. 高精度光学锁相系统设计[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2021.  
Chen Y. Design of high precision optical phase locked system[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2021.
- [24] 赵亚. 面向空间激光干涉引力波探测的星间干涉链路中抖动光程耦合噪声研究[D]. 长春: 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 2021.  
Zhao Y. The research on the tilt to length coupling noise in inter-satellite interference link for the space-based gravitational wave detection[D]. Changchun: Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, 2021.
- [25] 董玉辉. 面向空间激光干涉引力波探测的精密指向和弱光锁相控制技术研究[D]. 北京: 中国科学院大学, 2015.  
Dong Y H. Research on precise pointing and weak light phase locked control technology for space laser interference gravitational wave detection[D]. Beijing: University of Chinese Academy of Sciences, 2015.
- [26] 王娟, 齐克奇, 王少鑫, 等. 面向空间引力波探测的激光干涉技术研究进展及展望[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2024, 54(7): 109-127.  
Wang J, Qi K Q, Wang S X, et al. Advance and prospect in the study of laser interferometry technology for space gravitational wave detection[J]. Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica), 2024, 54(7): 109-127.
- [27] 姜元泽. 波前差分传感技术中四象限光电探测器的优化与匹配研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2022.  
Jiang Y Z. Study on optimization and matching of quadrant photoreceiver in differential wavefront sensing[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2022.
- [28] Hewitson M, Armano M, Benedetti M, et al. Data analysis for the LISA technology package[J]. Classical and Quantum Gravity, 2009, 26(9): 094003.
- [29] 胡海林, 虞逸航, 陈迪俊, 等. 面向空间引力波探测的激光低频段相对强度噪声测试技术[J]. 中国激光, 2023, 50(23): 2301009.  
Hu H L, Yu Y H, Chen D J, et al. Measurement technology of laser relative intensity noise at low frequency for space-based gravitational wave detection[J]. Chinese Journal of Lasers, 2023, 50(23): 2301009.
- [30] Jiang Y Z, Jin X L, Yeh H C, et al. Shot-noise-limit performance of a weak-light phase readout system for intersatellite heterodyne interferometry[J]. Optics Express, 2021, 29(12): 18336-18350.
- [31] Liang Y R, Feng Y J, Xiao G Y, et al. Experimental scheme and noise analysis of weak-light phase locked loop for large-scale intersatellite laser interferometer[J]. Review of Scientific Instruments, 2021, 92(12): 124501.
- [32] 张梓祺, 于笑楠, 佟雪峰. 基于蒙特卡罗方法的相干四象限探测器仿真研究[J]. 中国激光, 2023, 50(13): 1306004.  
Zhang Z Q, Yu X N, Tong S F. Simulation system of coherent four-quadrant detector based on Monte Carlo method[J]. Chinese Journal of Lasers, 2023, 50(13): 1306004.
- [33] 万超. 纳瓦(nW)级弱光锁相技术研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2012.  
Wan C. A study on nW-level weak light optical phase-locking techniques[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2012.
- [34] Mu H L, Xu X, Le T R, et al. Transponder-type laser interferometer prototype for spaceborne gravitational wave detectors[J]. Applied Optics, 2024, 63(4): 1032-1038.

# Weak-Light Phase-Locked Ground-Based Experimental Validation and Noise Analysis of the Taiji Program

Wang Chen<sup>1,2,3,4</sup>, Gao Xuerong<sup>4</sup>, Qi Keqi<sup>4</sup>, Wang Shaoxin<sup>4</sup>, Li Pan<sup>4</sup>, Dong Peng<sup>1</sup>,  
Liu Heshan<sup>4\*</sup>, Luo Ziren<sup>2,4</sup>

<sup>1</sup>*School of Fundamental Physics and Mathematical Sciences, Hangzhou Institute for Advanced Study, UCAS, Hangzhou 310024, Zhejiang, China;*

<sup>2</sup>*National Space Science Center, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;*

<sup>3</sup>*University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;*

<sup>4</sup>*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*

## Abstract

**Objective** This study tackles the critical challenge of inter-satellite laser power attenuation to the nanowatt (nW) level in the Taiji Program. We systematically validate the feasibility of weak-light phase-locking technology under extreme low-light conditions through ground-based experiments. Further, the key noise mechanisms that limit phase-locking precision are analyzed. The research objectives include the development of a mathematical model of the phase-locked loop suitable for long-baseline interferometry and the optimization of control parameters to address dynamic Doppler frequency shifts ranging across 5–25 MHz. Further, the contributions of shot noise, carrier-to-noise ratio (CNR) noise, phasemeter noise, and environmental noise are quantified, and the stability boundaries of phase locking under low CNR conditions, specifically at  $-86$  dB-Hz is examined. By bridging the technological gap in ultra-weak-light phase locking in China, this study provides both theoretical and experimental foundations necessary for achieving picometer-level displacement measurements in the Taiji Program. This advances space-based gravitational wave detection from theoretical design to engineering implementation. Furthermore, the findings offer valuable insights into noise suppression strategies and system optimization.

**Methods** The research team developed a modular, ground-based weak-light phase-locking verification system to simulate the inter-satellite low-light conditions. A master laser (Mephisto 500NEFC, wavelength: 1064 nm) was attenuated to 0.49 nW using a variable optical attenuator, simulating the weak signal from a distant satellite. Simultaneously, a slave laser served as a local oscillator, delivering a power of 20  $\mu$ W. The two beams were coupled into a four-interferometer setup (fused silica substrate) within a vacuum chamber (10 Pa pressure) via a polarizing beam splitter. The interferometry unit employed a balanced detection scheme, where signals were captured through high-sensitivity avalanche photodiodes (Thorlabs APD430M/C, responsivity: 12 A/W, noise equivalent power (NEP): 0.45 pW/Hz<sup>1/2</sup>) and converted into electrical signals using transimpedance amplifiers. The closed-loop control unit, implemented on a field programmable gate array platform (Moku:Pro), integrated a 24-bit resolution phasemeter, dual-loop PID controllers (PZT loop bandwidth: 100 kHz, TEC loop bandwidth: 1 Hz), and a fourth-order Butterworth low-pass filter with a 50 kHz cutoff. Real-time CNR monitoring was performed using a spectrum analyzer. Further, an LTPDA Toolbox was used for the frequency-domain decomposition of residual phase errors across a range of 0.1 mHz to 100 kHz. Theoretical models were developed to represent key noise sources, including shot noise  $S_{\text{shot}} = hc/(\lambda P)$  and CNR noise  $S_{\text{CNR}} = \sqrt{10^{(C/N_0)/10}}$ . These models were compared against experimental data to systematically analyze the noise contributions.

**Results and Discussions** Under weak-light conditions (0.49 nW, CNR =  $-86$  dB-Hz), the system achieves a residual phase error of  $6 \times 10^{-5}$  rad/Hz<sup>1/2</sup> ( $>0.02$  Hz), approaching the theoretical CNR noise limit of  $5.01 \times 10^{-5}$  rad/Hz<sup>1/2</sup> and corresponding to an equivalent displacement noise of 10 pm/Hz<sup>1/2</sup>. Under strong-light conditions (1.7  $\mu$ W), the residual phase error decreases to  $4.5 \times 10^{-5}$  rad/Hz<sup>1/2</sup>, reaching the phasemeter's noise floor, which is limited by a 10 bit ADC quantization and the 1.25 GSa/s clock jitter. Noise analysis reveals that the CNR noise dominates the high-frequency range ( $>0.1$  Hz) under low CNR conditions, contributing over 60% of the total noise and exhibiting a  $1/P$  attenuation trend as the weak-light power increases. Low-frequency residuals ( $<0.1$  Hz) are significantly affected by thermal drift, with the interferometer's Invar base (thermal expansion coefficient of  $1.2 \times 10^{-6}$  K<sup>-1</sup>) facilitating a phase drift of  $2 \times 10^{-4}$  rad/Hz<sup>1/2</sup> at 1 mHz. Further, mid-frequency laser frequency jitter is suppressed by 40 dB via the dual-loop PID control system, demonstrating strong broadband disturbance rejection. Compared to LISA's analog phase-locked loop (17 nW,  $5 \times 10^{-6}$  rad/Hz<sup>1/2</sup>) and Tsinghua University's digital approach (9 pW,  $5.2 \times 10^{-4}$  rad/Hz<sup>1/2</sup>), this study demonstrates superior high-frequency performance at the nW level. However, the low-frequency stability must be further improved through active thermal control ( $\pm 0.01$  °C).

**Conclusions** This study provides conclusive validation of the weak-light phase-locking technology for the Taiji Program, achieving

a precision of  $10 \text{ pm/Hz}^{1/2}$  at  $0.49 \text{ nW}$ . To the best of our knowledge, this is the first demonstration of CNR noise-dominated performance in China and the results successfully satisfy the Taiji mission's displacement measurement requirement of  $8 \text{ pm/Hz}^{1/2}$ . The research delineates the full-bandwidth noise distribution, identifying CNR noise as the dominant factor at high frequencies ( $>0.1 \text{ Hz}$ ), thermal drift as the primary influence at low frequencies ( $<0.1 \text{ Hz}$ ), and phasemeter electronic noise as the limiting factor under strong-light conditions. The proposed optimization strategies include low-noise APDs ( $\text{NEP} < 0.1 \text{ pW/Hz}^{1/2}$ ), photon-counting techniques for weak-light detection, and adaptive thermal control systems. The experimental results align with the theoretical models ( $<15\%$  deviation), thereby confirming the reliability of the framework for space system simulations. Future work will focus on suppressing coupled multi-degree-of-freedom noise, such as vibration-thermal cross-sensitivity, and validating the system's adaptability to in-orbit environmental conditions, including radiation hardening and microgravity effects. These advancements aim to accelerate the transition of the Taiji Program from laboratory research to practical deep-space applications.

**Key words** weak-light phase-locking; Taiji Program; carrier-to-noise ratio noise; shot noise